

跨音速小扰动方程的多重解

施发树 董松野 于守志

(航空航天部31所)

摘要 本文利用 Engquist-Osher 格式^[1], 离散跨音速小扰动方程(TSD)和边界条件^[2,3], 选择不同初场计算 NACA0012 翼型二维定常位势流场, 得到了与试验值^[3] 较符合的结果, 同时用 Murman-Cole 非守恒和守恒两格式计算并进行了比较。着重用数值实验进一步探讨多重解问题, 发现并总结出了几点很有参考价值的规律和现象。

关键词 跨音速流, 小扰动流, 数值法和计算方程, 数值解, 分析

MULTIPLE SOLUTIONS OF THE TRANSONIC PERTURBATION EQUATION

Shi Fashu Dong Songye Yu Shouzhi

(The 31st Research institute)

Abstract: In the present work, Engquist-Osher scheme was adopted to solve two-dimensional steady potential flow field over NACA0012 airfoil by discrete transonic perturbation equation (TSD). The solutions are in agreement with experimental results. In order to investigate the problem of multiple solutions, the nonconservative and conservative forms of Murman-Cole scheme were used and compared simultaneously. Some useful phenomena have been found as follows.

The solutions with E-O scheme are not unique. Under the condition of narrow Mach number region (about 0.84~0.86) and zero angle of attack, there exist three converged solutions. One is a correct symmetric solution, and others positive and negative nonsymmetric solutions. In other cases, the solution is unique. when circulation strength (or symmetric specificity parameter) Γ is greater than 10^{-3} in order of magnitude, the sym-

metric solution can't be obtained. Only if the zero potential field or almost completely symmetric field (Γ within $10^{-16} \sim 10^{-3}$) was taken as initial field, the symmetric solution can be solution.

The converged solutions and characteristics of M-C conservative scheme are very similar to that of E-O scheme, but its pressure coefficient C_p value jumps sharply near parabolic points. Also one disagreement with conclusions reported before about M-C nonconservative scheme has been found in supercritical case.

The nonuniqueness is supposed to be associated with transonic perturbation simulation model. To prevent solution from nonuniqueness, the relation of trailing edge boundary condition must be modified, so that the model can be in agreement with the practical physical flow.

Keywords: Transonic flow, Small-perturbation flow, Numerical method and procedure, Numerical solution, Analysis

1 前言

70年代初, Murman和Cole用混合有限差分格式求解绕NACA0012 对称翼型的跨音速位势场,成功地捕捉了激波,从此奠定了用数值方法求解跨音速位势场的基础,用位势方程求解跨音速位势场简单实用,为工程设计提供了很方便的预测手段。

由于求解跨音速位势场所沿用的主要方法是松弛迭代法和时间推进法,都要涉及到初场的选取,也就带来了解的唯一性问题。物理方程的数学解之不同于纯数学问题解的地方,在于它必须满足适定性。探讨解的唯一性问题具有重要的理论和应用价值,它可以为工程实践提供重要的应用途径和指导方向。

1971年,文献[2]作者用 Murman-Cole 非守恒格式求解绕 NACA0012 翼型流场时发现:在超临界情况下,用较高“熵”状态下的收敛场作为较低“熵”状态下的初场,结果不唯一;反之,却唯一;在亚临界情况下,结果唯一。

1981年,Steinboff 和 Jameson 用全位势方程求解绕 Joukowski 翼型位势场,发现马赫数 $M_\infty = 0.83 \sim 0.85$, 零攻角状态下,获得三个解。他用数值实验排除了由网格划分和离散误差所造成的假设^[4]。

Engquist-Osher 提出了 M-C 格式的修正式,排除了膨胀激波,证明了此格式守恒、非线性稳定^[1]。本文试图用数值实验对多重解现象作进一步的探讨,并分析其背景和原因。

2 跨音速小扰动理论问题

2.1 绕薄翼流动数学模型

所谓跨音速小扰动理论问题包含两个内容:一个是控制方程,另一个是边界条件。控制方程即跨音速小扰动方程,原形式为:

经过相似变换得到一个无量纲化了的TSD方程:

$$[K - (\gamma + 1)\varphi_x] \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad (2)$$

其中 $K = (1 - M_\infty^2) / (M_\infty^2 \cdot \delta)^{2/3}$, δ 为翼型相对厚度, 压力系数 $C_p = -2\delta^{2/3}\varphi_x / M_\infty^{2/3}$.

跨音速小扰动定常势流问题是混合型问题, 其解是Tricomi证明存在的, 见图1。

亚音区解的适定性问题是Dichilet问题, 需要给定此区域的所有边界条件, 超音区域的适定性问题是Cauchy问题, 需要给定初始条件和一边界条件。边界条件给的合适与否, 会导致多重解、无解或唯一解。整个跨音区域的边界条件有四个, 即:

(1) 音速线和激波线上的边界条件。在弱激波等熵假设下, TSD方程自动满足此边界上的条件。

(2) 远场边界条件。假设远场扰动无穷小, 下式成立^[2]:

$$\varphi(x, y) = \frac{\alpha}{\delta\pi\sqrt{K}} - \frac{\Gamma}{2\pi}\theta(x, y) \quad \text{其中 } \Gamma: \text{环境强度}, \theta: \text{极角}.$$

(3) 物面边界条件。气流沿无渗透固壁流动, 满足下式:

$$\varphi_y(x, 0_\pm) = f_{u,1}(x) - \alpha/\delta$$

(4) Kutta条件。尾缘处应该满足上、下压力相等, 速度方向相同, 即

$$[\varphi_x]_{TE} = \varphi_x(1, 0_+) - \varphi_x(1, 0_-) = 0$$

再加上 $[S] > 0$ 假设 (熵增假设), 排除非物理膨胀激波, 这就构成了一个完整的物理数学问题。解这类混合型问题最成功的方法是数值方法, 最常用的是混合有限差分格式。

本文采用E-O和M-C两格式。

2.2 E-O格式离散化

用E-O格式将TSD方程转化为数值问题, 相应地需做两个工作: 一是对控制方程的离散, 另一个是对边界点的离散, 主要考虑如何嵌入边界条件。

E-O格式关于亚音点的中心差分 and 超音点的一侧差分与M-C格式完全一样, 唯一不同的是从亚音到超音和从超音到亚音两过渡区各自多引入了一点, 结果使得由音速到超音速时, 压力系数 C_p 曲线更光滑连续, 由超音到亚音时, 激波更平滑。

对边界点的离散主要指物面边界点和尾缘边界点的离散。

(1) 物面边界点离散。如图2示, 薄翼线化为一条网格线, 翼面上的网格点 x 向差分不变, y 向二阶偏微分式 $(\varphi_{yy})_{j,0\pm}$ 近似等于下式:

$$(\varphi_{yy})_{j,0\pm} = \left[\frac{\varphi_{j,1\pm} - \varphi_{j,\pm 0}}{\Delta y} \right] - \varphi_y(j, 0_\pm) \left] \frac{2}{\Delta y} \right.$$

(2) 尾缘边界点的离散。尾缘点上、下速度相等, 由扰动位势值 φ 发生一 Γ 值跳跃来保证, 尾缘边界条件等价表达式为:

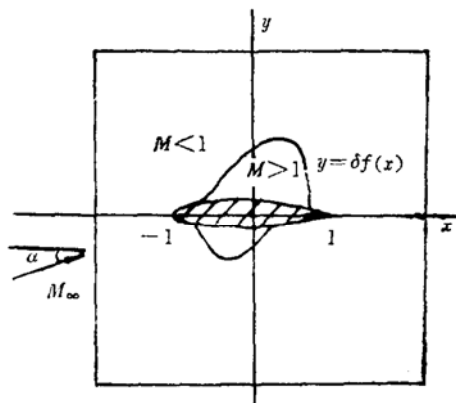


图1 绕翼型的跨音速物理流动

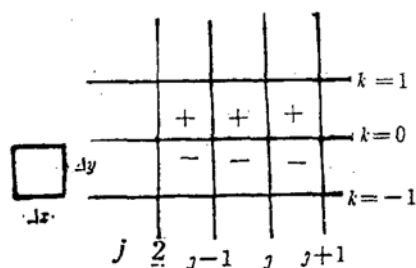


图2 翼面网格划分

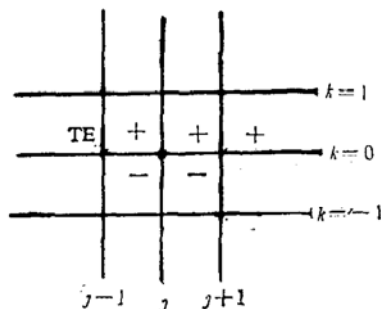


图3 尾缘边界网格划分

$$[\varphi]_{TE} = \varphi(1, 0+) - \varphi(1, 0-) = \Gamma$$

尾缘线上网格点的 x 向差分式不变, y 向二阶偏微分近似式取:

$$(\varphi_{yy})_{j,0\pm} = \frac{1}{\Delta y} \left[\frac{\varphi_{j,1} - \varphi_{j,0} - \Gamma}{\Delta y} - \frac{\varphi_{j,0} - \varphi_{j,-1}}{\Delta y} \right]$$

2.3 线松弛迭代法(SLOR)

归纳整理所有点 (i, k) 的差分式得到下列统一的表达式:

$$A_{i,k+1} \cdot \varphi_{i,k+1} + B_{i,k} \cdot \varphi_{i,k} + C_{i,k-1} \cdot \varphi_{i,k-1} = D_{i,k} \quad (3)$$

其中 $A_{i,k+1} = \frac{1}{\Delta y}, C_{i,k-1} = \frac{1}{\Delta y}$

在双曲点和激波点上, 式(3)是关于位势值的非线性三元一次方程, 无法求解。在迭代过程中, 将 $B_{i,k}$ 和 $D_{i,k}$ 中的 $\varphi_{i,k}$ 值用旧值 $\varphi_{i,k}^{n-1}$ 代入, 这样式(3)就变成线性的三元一次方程了。

联立 y 向一系列网格线上点的三元一次方程得到一个三对角矩阵方程组, 形式如下:

$$A_{i,k} \cdot \phi_{i,k} = F_{i,k}$$

用追赶法求解。为了加快收敛速度, 对 $\phi_{i,k}$ 进行线松弛

$$\phi_{i,k}^n = W \cdot \phi_{i,k}^{n-1} + (1-W) \phi_{i,k}^{n-1}$$

对超音速点低松弛, $W=0.9$; 对亚音速点超松弛, $W=1.9$ 。

整个场沿 x 向逐列进行松弛迭代, 如此重复, 直到收敛。收敛标准取 $\varepsilon = \max |\varphi_{i,k}^n - \varphi_{i,k}^{n-1}| = 0.1 \times 10^{-4}$ 。

3 数值实验结果分析与比较

3.1 数值实验方案

所谓的数值实验是针对某一特定的工况(M_∞, α 一定), 选取不同的初场进行大量计算。

计算结果包括环流强度 Γ (衡量对称性好坏的特征量)、场的最大收敛残值 ε 、最大残值点 (j, k) 和收敛迭代次数 N , 收敛后输出升力系数 C_l 和压力系数 C_p 值。

网格划分如图4, 采用正交网格, 前、后缘处网格最密, 共 80×40 个网格。

K 值决定亚音区和超音区的范围, C_p 值调整翼面上最大膨胀速度, 选取三种实验值^[3]的

工况, 对不同的 K 和 C_p 值进行计算, 与实验结果比较, 最后定下一折衷的 K 和 C_p 值。对于E-O格式, $K = (1 - M_\infty^2) / (M_\infty^{2.5} \delta)^{2/3}$, $C_p = -2\delta^{2/3} / M_\infty^{1/3}$ 。

3.2 E-O计算结果与分析

3.2.1 稳定性分析

判断收敛与否一般需综合考察 $\varepsilon(j, k)$ 点、 N 和 Γ 四个参数的变化情况, 最大收敛残值点 (j, k) 最后总是稳定在某激波区域。

3.2.2 准确性分析

以 $M_\infty = 0.80$, $\alpha = 0^\circ$ 工况为例, 三个不同初场下的计算结果列于表1, 另外 C_p 值相差无几, 认为结果唯一。

3.2.3 收敛速度分析

非零初场的收敛速度较慢。一般来说, 低马赫数、零攻角状态收敛较快, 因为较高 M_∞ 和较大 α 下的收敛稳定性较差, 激波位置移动较慢所致。另外 Γ 值相近的两收敛场彼此作为对方的初场, 收敛较快。总之两位势场相近的工况彼此作为对方的初场, 收敛就快得多。

3.2.4 多重解分析

大量的数值实验证实: 在 $M_\infty = 0.84 \sim 0.86$, $\alpha = 0^\circ$ 工况下存在三个解, 一个为对称解, 另外两个为一正一负的非对称解, 其中 Γ 、 C_i 绝对值较大, 如图5所示, 图6给出了多重解压力系数曲线。图7为非对称解的非真实物理流动。

“小扰动”实验证明: 场对称性特征量 Γ 对多重解的收敛有影响, $\Gamma > 10^{-3}$ 量级无法收敛到对称解, 而是 Γ 值经历一个缓慢的增加过程, 上激波后移, 下激波前移, 最后收敛到非对称解。

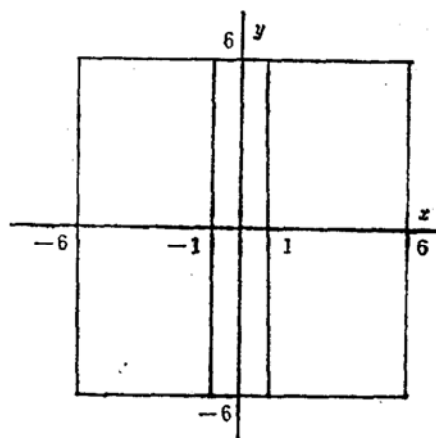


图4 网格划分

表1

初 场	ε	$N(j, k)$	Γ	C_i
O		150	10^{-15}	10^{-16}
$(\varphi)_{0.8, 1^\circ}$	0.10×10^{-4}	1219 (37, 17)	0.10×10^{-2}	0.15×10^{-3}
$(\varphi)_{0.85, 1^\circ}$		1318		

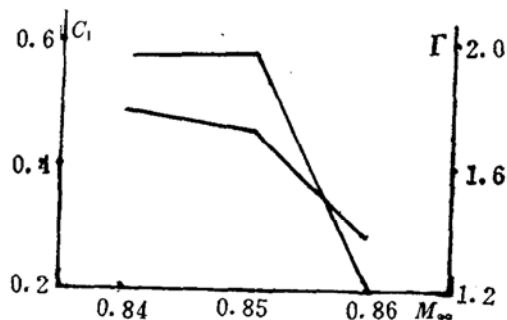


图5 非对称解现象

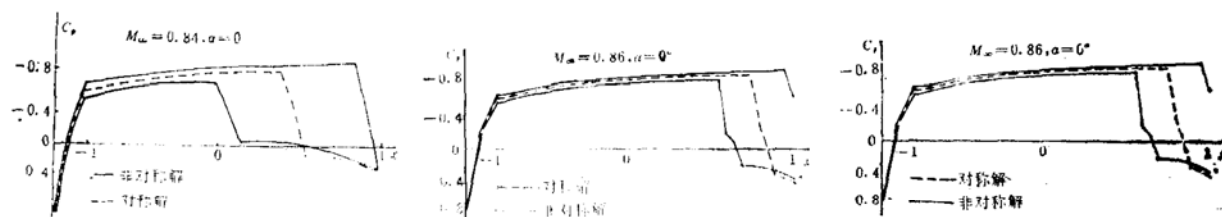


图6 多重解压力系数曲线

实验中还发现, 在 $M_\infty = 0.85$, $\alpha = 0^\circ$ 工况下, 完全对称场作为初场, 由于松弛因子取得过大, 破坏了当时当地的对称性, Γ 发生跳跃, 结果也收敛到非对称解。

3.3 M-C格式结果分析与比较

大量数值实验表明, 与E-O格式相比, M-C守恒格式的收敛值 (包括 Γ , C_l , ε , C_p), 收敛速度和稳定性、多重解现象都十分相近。以 $M_\infty = 0.80$, $\alpha = 0^\circ$ 工况为例, 图8画出两格式计算结果 C_p 曲线。

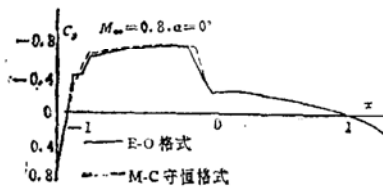


图8 E-O与M-C两格式比较

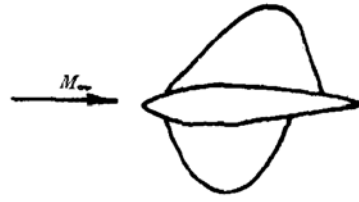


图7 非真实物理扰动

用M-C非守恒格式计算之前, 同样需要选择 K 和 C_p 近似值, 取 $K = (1 - M_\infty^2) / (M_\infty^2 \cdot \delta)$, $C_p = 2\delta^{2/3} \varphi_x / M_\infty^{1/3}$, 与M-C守恒格式一样, 从亚音过渡到超音时, C_p 曲线不连续光滑, 暴露了产生膨胀激波的可能性, 其激波仅占据一个网格。

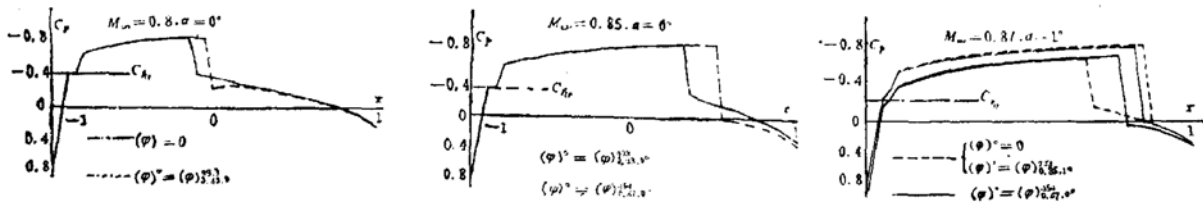


图9 M-C非守恒格式多重解现象

M-C非守恒格式的多重解范围要宽广得多。一般用较小攻角和较低马赫数工况的收敛场作为较大攻角和较高马赫数工况的初场, 收敛结果与零初场一样, 反之不同, 但亦有例外, 现以三种状态下计算结果为例 (如图9)。

4 结 论

总结大量的数值实验结果和分析, 我们可以得出以下几个主要结论:

1) 用E-O格式求解跨音速小扰动方程存在多重解。与M-C非守恒格式相比, 它排除了零攻角状态以外的多重解现象。仅在很窄的马赫数 M_∞ 范围内 ($0.84 \sim 0.86$) 获得三个解, 一个为对称解, 另外两个为一正一负 (互为颠倒) 的非对称解, 这是一个新的发现。

2) 对称性特征量 $\Gamma > 10^{-3}$ 量级时, 无法收敛到对称解。只有取零初场或差不多完全对称的收敛场 (Γ 量级介于 $10^{-3} \sim 10^{-5}$ 之间) 作为初场, 才能收敛到对称解。

3) 松弛因子能影响多重解的收敛。以对称的收敛场作为 $M_\infty = 0.84 \sim 0.86$, $\alpha = 0^\circ$ 工况的初场, 松弛因子过大会破坏当时当地的对称性, Γ 发生大的跳跃, 结果无法收敛到对称解, 而是非对称解。

4) 判断收敛与否需要综合考察最大收敛残值 ε , 对称性特征量 Γ 、最大残值点 (j, k)

和收敛次数 N ，简单地考虑一个因素是不准确的。一般情况下，最大残值点总出现在边界点、前缘点、尾缘点和激波点上，最后总是稳定在某激波点上。

5) M-C守恒格式收敛值(包括 C_1 、 Γ 、 ε)、收敛速度、稳定性、多重解现象与E-O格式相比稍差或相似，但在音速点附近， C_p 值不够连续光滑，其激波最多占据两网格。

6) M-C非守恒格式不唯一现象要宽广复杂得多。一般地，超临界流动时，以零初场和小攻角、低马赫数的收敛解作为大攻角、高马赫数下的初场，收敛到物理解。反之则不然；亚临界流动时，解唯一，但亦有反常的情况，这使得M-C非守恒格式的收敛值可靠性令人怀疑。

7) 总而言之，解TSD方程取零扰动初场是合理的。对M-C非守恒格式来说，零扰动初场可以保证计算结果与实验值有很好的近似，而在速度上未必牺牲多少；就E-O格式或M-C守恒格式而言，取零扰动初场也完全有效可行。

8) M-C非守恒格式捕捉激波位置准确且收敛快速，但在音速点附近，和M-C守恒格式一样， C_p 曲线出现不连续光滑，暴露了膨胀激波的可能性，且激波仅占一个网格，这与实际流动不符。E-O格式的收敛稳定性、速度和多重解现象与M-C守恒格式相比相近或稍好，所以E-O格式比M-C两格式在某种意义上更可取。

9) 跨音相似参数 K 决定亚音区和超音区的划分，调整 K 值也就可以调整翼面上的激波位置。压力系数也可以根据翼面上最大膨胀速度大小作适当调整，取折衷值。

与M-C非守恒格式相比，同样 K 值，守恒格式计算结果激波后移，高 M_∞ 和大攻角 α 下，移动更显著。

10) 根据仔细分析，作者认为：多重解现象来源于数值模型近似本身，消除多重解现象应该首先从尾缘边界条件表达式修正着手。因为本文中尾缘数值表达式只能保证速度方向和大小相等，不能保证压力上、下值相等。实际上，由于上、下翼面激波强弱不同，因此尾缘线上下能量有耗散，来流马赫数越大，能量耗散也越大，因此尾缘边界条件表达式中应该考虑这种能量耗散的影响。

参 考 文 献

- [1] Engquist B E and Osher S J. Stable and Entropy Satisfying Approximation for Transonic Flow Calculations. Mathematics of Computation, Jan. 1980, 34(149)
- [2] 陈铁民. 二元定常跨音速流有限差分计算中的初场问题. 空气动力学学报, 1982(3)
- [3] 戴昌辉, 程朴人. NACA0012翼型跨音速压力分布综合研究. 南京航空学院
- [4] Steinhoff J and Jameson. Multiple Solutions of the Transonic Potential Flow Equation. J. AIAA, 1982, 20