改进的变比热正冲波解析解

崔济亚

(北京航空航天大学)

摘 要：本文推导出不牵动总温的变比热正冲波解析解全套公式，并作了算例，说明改进解析解比原解析解合理、准确、而且简明迅速，所以是先进的。

主题词：变比热，正激波，改进解析解

AN IMPROVED ANALYTICAL SOLUTION OF VARYING SPECIFIC HEAT NORMAL SHOCK WAVES

Cui Jiya

(Beijing University of Aeronautics & Astronautics)

Abstract: A set of formulae for an improved varying specific solution of normal shock waves is derived without involving total temperature. An illustrative example is included. The new solution is more rational and accurate, simpler and quicker than the original one, and is thus more advanced.

Keywords: Varying specific heat, Normal shock wave, Improved analytical solution.

1 前 言

作者导出变比热气动函数全套公式[1]后，曾用以求出变比热正冲波解析解[2]。求解过程中用到总温 T^* 以及总温与波前、后静温间的平均比热求平均比热比 k_1、k_2。可是冲波的物理过程实际温度并不到总温之高，而比热又是温度的高次方多项式函数，这就牵涉到按线性关系求出的比热比是否合乎逻辑或准确。为此试推出不用总温的正冲波解析解，以提高计算精度。

本文1992年5月15日收到，属国家自然科学基金资助项目。

2　公式推导

由于力求避免用临界温度及速度，所以推导按波前后马赫数进行。

能量方程：

$$c_{p_{12}}(T_2 - T_1) = \frac{1}{2}\left(c_1^2 - c_2^2\right)$$

或
$$c_{p_{12}}\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1^2}{T_1} - \frac{c_2^2}{T_2}\,\frac{T_2}{T_1}\right)$$

或
$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{R}{2c_{p_{12}}}\left(\frac{k_{T_1}c_1^2}{k_{T_1}RT_1} - \frac{k_{T_2}c_2^2}{k_{T_2}RT_2}\,\frac{T_2}{T_1}\right) + 1$$

$$= \frac{k_{12}-1}{2k_{12}}\left(k_{T_1}M_1^2 - k_{T_2}M_2^2\frac{T_2}{T_1}\right) + 1$$

即
$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \dfrac{k_{12}-1}{2k_{12}}k_{T_1}M_1^2}{1 + \dfrac{k_{12}-1}{2k_{12}}k_{T_2}M_2^2} \tag{1}$$

状态方程及连续方程：

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{T_2}{T_1}\frac{c_1}{c_2} = \frac{T_2}{T_1}\frac{M_1a_1}{M_2a_2} = \frac{M_1}{M_2}\sqrt{\frac{k_{T_1}}{k_{T_2}}\frac{T_2}{T_1}}$$

代入（1）式得：

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2}\sqrt{\frac{k_{T_1}\left(1 + \dfrac{k_{12}-1}{2k_{12}}k_{T_1}M_1^2\right)}{k_{T_2}\left(1 + \dfrac{k_{12}-1}{2k_{12}}k_{T_2}M_2^2\right)}} \tag{2}$$

动量方程：

$$p_1 + \rho_1 c_1^2 = p_2 + \rho_2 c_2^2$$

或
$$p_1 + \frac{p_1c_1^2}{RT_1} = p_2 + \frac{p_2c_2^2}{RT_2}$$

或
$$p_1(1 + k_{T_1}M_1^2) = p_2(1 + k_{T_2}M_2^2)$$

即
$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + k_{T_1}M_1^2}{1 + k_{T_2}M_2^2} \tag{3}$$

将（2）（3）两式合并可有：

$$\frac{M_1\sqrt{k_{T_1}\left(1+\dfrac{k_{12}-1}{2k_{12}}k_{T_1}M_1^2\right)}}{1+k_{T_1}M_1^2}=\frac{M_2\sqrt{k_{T_2}\left(1+\dfrac{k_{12}-1}{2k_{12}}k_{T_2}M_2^2\right)}}{1+k_{T_2}M_2^2}$$

为简化此式而暂取

$$x=k_{T_2}M_2^2,\ \mathrm{y}=\frac{k_{12}-1}{2k_{12}},\ b=k_{T_1}M_1^2$$

于是上式成

$$\frac{b+yb^2}{(1+b)^2}=\frac{x+yx^2}{(1+x)^2}$$

经过化简得

$$[y-(1-2y)b]x^2+[1+(1-2y)b^2)x-(b+b^2y)=0$$

解为：

$$x=k_{T_2}M_2^2=\frac{-[1+(1-2y)b^2]\pm\sqrt{[1+(1-2y)b^2]^2+4[y-(1-2y)b](b+b^2y)}}{2[y-(1-2y)b]}$$

根号内经过化简为 $[1+2by-(1-2y)b^2]^2$，所以

$$k_{T_2}M_2^2=\frac{[1+(1-2y)b^2]\mp[1+2by-(1-2y)b^2]}{2[(1-2y)b-y]}$$

$$-\text{号}:\quad \frac{2b[(1-2y)b-y]}{2[(1-2y)b-y]}=b=k_{T_1}M_1^2\ \text{无意义}$$

$$+\text{号}:\quad \frac{2by+2}{2[(1-2y)b-y]}=\frac{\dfrac{k_{12}-1}{k_{12}}k_{T_1}M_1^2+2}{2\left[\dfrac{1}{k_{12}}k_{T_1}M_1^2-\dfrac{k_{12}-1}{2k_{12}}\right]}=\frac{k_{T_1}M_1^2+\dfrac{2k_{12}}{k_{12}-1}}{\dfrac{2k_{T_1}M_1^2}{k_{12}-1}-1}$$

因此解出：

$$M_2^2=\frac{\dfrac{k_{T_1}}{k_{T_2}}M_1^2+\dfrac{2k_{12}}{k_{12}-1}\dfrac{1}{k_{T_2}}}{\dfrac{2k_{T_1}}{k_{12}-1}M_1^2-1}\qquad(4)$$

此式在定比热时退化为常见公式

$$M_2^2=\frac{M_1^2+\dfrac{2}{k-1}}{\dfrac{2k}{k-1}M_1^2-1}$$

求解（4）式时，须先假设 T_2 以设定 k_{T_2} 及 k_{12}，解出 M_2 后，应按（1）式检验 T_2 与原设值相同时为止，这种迭代在计算机上是轻而易举的。至于 k_{12} 按焓值拟合公式[3]求平均比热来定，比动用总温显然准确的多。

波后 M_2 求定后，可由（3）式求增压比。总压系数 σ 及熵增 Δs 仍按文献〔2〕给式求定：

$$\sigma=\frac{p_2^*}{p_1^*}=\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\frac{\pi_{T_1}^0}{\pi_{T_2}^0} \tag{5}$$

$$\Delta s=-R\ln\sigma \tag{6}$$

如需求速度系数，容易仿（1）式设临界温度 T_k 求 k_{1k}、k_k 到所得

$$T_k=T_1\frac{1+\dfrac{k_{1k}-1}{2k_{1k}}k_{T_1}M_1^2}{1+\dfrac{k_{1k}-1}{2k_{1k}}k_k}$$

与设值相等为止，然后 λ_1、λ_2 均按下式求出：

$$\lambda=M\sqrt{\frac{k_T T}{k_k T_k}}$$

这一改进解析解，比文献〔2〕原解又进一步简化而迅速。

3 算 例

下表列出空气 $T_1=222\text{K}$（$k_{T_1}=1.4004$），$M_1=3.0$ 正冲波双精度计算结果，及原解析解误差。

参数		改进解析解	原解析解	误差
	T_2	590.579074	590.579097	3.9×10^{-8}
	k_{T2}	1.376931701		$<1\times10^{-14}$
	k_{12}	1.3928	—	
	M_2	0.47583189	0.47583191	3.7×10^{-8}
改进解不必需	k_k	1.38494676	1.38494681	4.1×10^{-8}
	T_k	517.176515	517.176533	3.5×10^{-8}
	λ_1	1.97646143	1.97646136	3.8×10^{-8}
	λ_2	0.50700569	0.50700570	1.9×10^{-8}

续表

参数		改进解析解	原解析解	误差
改进解不需要	T^*	—	615.71	
	k_v	—	1.3796	
	k_1	—	1.3916	
	k_2	—	1.3755	
	p_2/p_1	10.3705213	10.3705211	-1.7×10^{-8}
	$\sigma=p_2^*/p_1^*$	0.32736792	0.32736787	-1.6×10^{-7}
	ΔS (J/kg·K)	320.541438	320.541484	1.4×10^{-7}

4 结　　语

由计算结果对照，原解析解的误差极小，可说还是准确的；但改进解不牵动总温，更为合理，且求解更为简明迅速，所以是先进的。

参 考 文 献

〔1〕 崔济亚．变比热气动函数式及计算的准确解和近似解．工程热物理学报，1986，7(3)

〔2〕 崔济亚．变比热时气动函数式的简化及正冲波解析解．工程热物理学报，1990,11(2)

〔3〕 张世铮．燃气热力性质的数学公式表示法．工程热物理学报，1980，1(1)

（上接第12页）

案的分析，可以用较快的时间完成多个发动机构型方案的分析与比较工作，为发动机构型方案的科学决策提供了一个强有力的工具。

软件的维护是一个漫长的过程，需要在软件的使用过程中，不断地发现问题和解决问题，增加与完善功能模块。而软件 LRE/CAA 按独立模块组合的特点，有利于软件维护工作的开展。进一步完善现有的分析模型，提高分析精度是下一步要深入开展的工作。

参 考 文 献

〔1〕 陈杰．液体火箭发动机系统动力平衡参数通用计算方法．上海航天，1991(4)

〔2〕 陈杰，陈启智．液体推进剂火箭发动机元件质量模型．航空与航天，1991(1)

〔3〕 陈杰．串联与并联推进多级运载火箭线性化质量方程．中国空间科学技术，1990(4)

〔4〕 陈杰．航天运载器液体推进剂火箭发动机构型研究:〔博士论文〕．长沙：国防科学技术大学，1991

〔5〕 Pressman R S. Software Engineering——A Practitioner's Approach. McGraw Hill Book Company，1982