

固体火箭发动机一维准定 常内弹道解法

胡 大 亿

(国防科技大学)

摘 要

本文着重讨论了固体火箭发动机一维准定常内弹道问题的解法。指出这个问题可有两种解法：平衡解法和非平衡解法，并用实例计算说明了非平衡解法优于平衡解法。

主题词：固体火箭发动机，内弹道计算，一维流，准定常流

符 号 表

A ——通道横截面积	r ——在横截面内的等效燃速
A_t ——喷喉面积	r_N ——沿燃面法线方向的燃速
a ——音速	S ——通道的周线长
b ——燃速系数	T ——燃气温度
C_p ——定压比热	t ——时间
c^* ——特征速度	V ——燃烧室自由容积
d ——通道直径	v ——气流速度
e ——沿横截面的燃烧厚度	x ——沿通道轴线的坐标
H ——气体的比焓	ε_r ——侵蚀函数
h ——沿 x 的计算步长	δ ——相对密流
k ——燃气的比热比	δ_t ——相对密流的界限值
K_s ——侵蚀常数	ρ ——气体密度
L ——药柱长度	ρ_p ——推进剂密度
$\dot{m}_b$ ——燃气生成率或净增率	下 标：
$\dot{m}_t$ ——喷管的质量流率	cr——临界参数
n ——燃速的压力指数，沿 L 的等分数	L ——装药末端参数
p ——燃气压力	O ——装药头部参数
R ——气体常数	S ——滞止参数

本文1987年7月10日收到

一、引言

一般固体火箭发动机的启动与卸压过程是很短促的, 工作比较平稳的准稳定过程占整个工作时间的绝大部分。因此, 准确计算发动机准稳定过程中参数随时间的变化是内弹道计算的根本任务之一。

所谓准稳定过程是对包括零维在内的情况而言的, 对于一维情况就是指满足准定常条件的准定常过程。关于零维情况下准稳定过程的解法, 在一般教材上已有详细讨论, 本文将只讨论一维准定常情况下内弹道问题的解法。

在一维准定常的情况下, 人们常利用如下条件来确定装药头部压力 p_0 〔1〕:

$$\dot{m}_b = \dot{m}_t \quad (1)$$

式中 $\dot{m}_b = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p}\right) \rho_p \int_0^L r s dx$ 为燃气净增率, 但通常 $\frac{\rho}{\rho_p} \ll 1$, 故在下面将 $\dot{m}_b$ 视为燃气生成率 $(= \rho_p \int_0^L r s dx)$ 。公式(1)是一平衡条件, 故将这种解法命名为平衡解法。

另一方面, 在已知 p_0 及通道尺寸的情况下, 利用如下关系式来确定下一时刻的 p_0 :

$$\frac{dp_0}{dt} = \frac{RT_0}{V} (\dot{m}_b - \dot{m}_t) \quad (2)$$

公式(2)是一非平衡条件, 故将利用这一条件的解法称为非平衡解法。

二、通道中燃气流的准定常方程组

考虑的典型发动机如图1所示, 它具有贴壁装填两端包覆的内孔燃烧药柱, 且只考虑其主要工作过程——准定常工作过程。

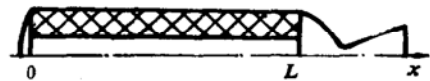


图1 典型发动机示意图

把燃烧表面视为可变形可渗透的壁面, 把燃气视为成分及比热不变的理想气体, 不计传热及摩擦损失等, 当满足准定常条件时, 略去守恒方程中的时间偏导数项, 便可得如下的一维准定常方程组

守恒方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\rho v A) &= \rho_p r s \\ \frac{\partial}{\partial x} (\rho v^2 A) &= -A \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho v A \left(H + \frac{v^2}{2} \right) \right] &= \rho_p r s H_0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

通道变化方程

$$\frac{\partial A}{\partial x} = r s \quad \text{或} \quad \frac{\partial e}{\partial t} = r \quad (4)$$

理想气体的有关方程

$$\left. \begin{aligned} p &= \rho RT \\ a &= \sqrt{kRT} = \sqrt{k p / \rho} \\ H &= C_p T = \frac{k}{k-1} RT \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

要对这一方程组解析求解是很困难的。但是由于方程组(3)及方程(4)都只各含一种偏导数,就可将它们化成为既相互关联又相对独立的两个常微分方程组,从而可用解常微分方程组的数值方法分别求解参数沿 x 的分布和随 t 的变化。这将给问题的求解带来很大方便。在增补必要的封闭方程之后,给定初始条件和边界条件,便可用数值方法对上述方程组求解。

三、参数沿 x 分布的解法

1. 方程组形式的转换

在固定瞬时 t , 方程组(3)可写成对 x 的常微分方程组。可解出 t 瞬时流动参数沿通道轴线 x 的分布。先将方程组转换为便于数值求解的形式。

为尽量使计算简单,先将能量方程积分成为常见的形式,并再利用(5)式,便可由质量和动量方程得

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= \frac{1}{a^2 - v^2} \left[(a^2 + kv^2) \frac{\rho_p r s}{\rho A} - \frac{a^2 v}{A} \frac{dA}{dx} \right] \\ \frac{d\rho}{dx} &= \frac{1}{a^2 - v^2} \left[\frac{\rho v^2}{A} \frac{dA}{dx} - (k+1) v \rho_p r s / A \right] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

通道几何参数 A , s 及 $\frac{dA}{dx}$ 在瞬时 t 是已知量,它们由通道初始尺寸及各截面处的燃烧厚度 e 通过一定几何关系来确定。为了使方程组封闭,还必须补充一个等效燃速 r 的关系式。

因为这里考虑的是准定常的情况,故采用常用的稳态燃速公式如下:

$$\left. \begin{aligned} r_N &= b p^n \cdot \varepsilon_r \\ \varepsilon_r &= 1 + K_\delta (\delta - \delta_c) \\ r &= r_N / \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中 δ_c 为发生侵蚀燃烧的界限值,当 $\delta \leq \delta_c$ 时, $\varepsilon_r = 1$; α 为通道的局部半锥角。

相对密流的定义为

$$\delta = \rho v / (\rho v)_{cr}$$

援用文献(2)的表达式,相对密流的临界值为

$$\begin{aligned} (\rho v)_{cr} &= p_0 / \sqrt{2(k+1)RT_0/k} \\ \delta &= \rho v \sqrt{2(k+1)RT_0/k} / p_0 \end{aligned} \quad (8)$$

又由能量方程的积分形式及(5)式可得

$$T = T_0 \left(1 - \frac{k-1}{2k} \frac{v^2}{RT_0} \right) \quad (9)$$

把以上方程组合在一起便得到一个封闭的方程组。

2. 数值解法简述

由于装药只在内孔燃烧, 两端包覆没有燃气生成, 在头部容腔较小可不计其影响的条件下, 头部截面处的气流速度可视为零, 相应的气体温度就是总温 T_0 。再给定头部压力 p_0 , 便得到 $x=0$ 处的已知条件为

$$\left. \begin{aligned} v &= 0 \\ T &= T_0 \\ p &= p_0 \\ \rho &= \rho_0 = p_0 / (RT_0) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

根据条件(10)及几何条件为已知, 则(6)式右边的量在 $x=0$ 处全部为已知。选定计算步长 $h=L/n$ 及适当的数值求解方法, 便可求出下一节点 $x=h$ 处的 v 及 ρ , 再利用(7)~(9)式便可求出新坐标处的 p 、 T 、 a 及 r , 于是又可以利用微分方程组(6)往下计算, 直到装药末端 $x=L$ 处为止。得出参数 p , T , ρ , v 及 r 在 t 瞬时沿 x 的分布。

根据准定常的概念可得

$$\dot{m}_b = \int_0^L \rho_p r s dx = (\rho v A)_L \quad (11)$$

另外假设装药末端后的流动是等熵的, 于是有

$$\dot{m}_t = p_{sL} A_t / C^* \quad (12)$$

$$\text{式中} \quad p_{sL} = p_L (T_0 / T_L)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (13)$$

在求解参数分布过程中算得的各截面上的 r 及其后算得的 $\dot{m}_b$ 及 $\dot{m}_t$ 将作为已知量用于计算参数随时间 t 变化, 这也就是求解两个单独常微分方程组中的相互关联之处。

四、参数随时间 t 变化的解法

当把装药长度分成 n 等分后, 沿装药长度每一节点的坐标也就确定下来。在坐标固定的截面上, 对时间的偏导数就可写成为全导数。故可由(4)式得到如下的方程组:

$$\frac{de_i}{dt} = r_i, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (14)$$

式中 r_i 是由参数分布计算所确定的量, 故方程组(14)的求解是一个与参数分布计算紧密相联系的问题。

应当强调指出, 在装药通道几何尺寸一定的条件下, 参数的分布与所给定的 p_0 有关: 给定不同的 p_0 值可有不同的参数分布。因此, p_0 的确定是求解中的一个重要问题。根据确定 p_0 的方法不同, 可以将求解方法区分为平衡解法和非平衡解法。

1. 平衡解法

平衡解法的基本思想是利用平衡条件(1)来确定 p_0 。为了便于区别起见, 我们将这样确定的头部压力记为 p_{0b} , 则考虑到在准定常条件下实际的 p_0 与 p_{0b} 是很接近的, 用后者代替前者是完全可以接受的。这就是平衡解法的依据。

p_{0b} 可用迭代法来确定。为了便于作数值计算, 我们将条件(1)改写为:

$$|\Delta| \leq \varepsilon \quad (15)$$

式中 $\Delta = \dot{m}_b / \dot{m}_t - 1$, ε 为控制计算精度的一个高阶小量, 如取 $\varepsilon = 10^{-5}$ 或更小。

计算时首先估算一个 p_0 值或取前一时刻的头部压力值为第一次试算值 $p_0^{(1)}$ 。用 $p_0^{(1)}$ 值

在已知通道及 T_0 值下作参数分布计算,并算出 $\Delta^{(1)} = \dot{m}_b^{(1)} / \dot{m}_t^{(1)} - 1$,看是否满足(15)式。如满足,则 $p_o^{(1)}$ 为所求的 p_{ob} ;如不满足,则用下式确定第二次试算值:

$$p_o^{(2)} = p_o^{(1)} \cdot \dot{m}_b^{(1)} / \dot{m}_t^{(1)} \quad (16)$$

再用 $p_o^{(2)}$ 算出 $\Delta^{(2)}$ 看是否满足(15)式。如仍不满足,则用下式进行迭代:

$$p_o^{(j+1)} = p_o^{(j)} + \Delta^{(j)} (p_o^{(j)} - p_o^{(j-1)}) / (\Delta^{(j-1)} - \Delta^{(j)}) \quad (17)$$

这里 $j=2,3,\dots,n_0$ 和以前一样进行计算并用(15)式判别,直到所算出的 $\Delta^{(j+1)}$ 满足(15)式为止。相应的 $p_o^{(j+1)}$ 便是所求的 p_{ob} 。

在 p_{ob} 确定之后,就可用它计算 t 瞬时的参数分布和确定各节点处的等效燃速 r_i 。选定时间步长 Δt 并采用适当的数值求解方法,就可以用(14)式算出下一时刻各横截面上的燃烧厚度 e^i 。再由几何关系算出通道各处的几何尺寸,从而又可算出新时刻的 p_{ob} 。这样,就可一步一步往下计算,直至准定常过程结束为止。

2. 非平衡解法

这一解法的特点是已知 t 瞬时的 p_o ,利用方程(2)来确定下一时刻的 p_o 。由于(2)式中含有 V ,故还要补充一个 V 的变化率方程。因为燃烧室自由容积 V 的变化率就是单位时间内所烧掉的装药体积,故不难得到补充方程如下:

$$\frac{dV}{dt} = \dot{m}_b / \rho_p \quad (18)$$

把方程(2),(14)及(18)结合在一起,便得到另一个封闭的常微分方程组。

再给定 $t=t_0$ 时刻的初始条件:

$$\left. \begin{aligned} p_o &= p_o(t_0) \\ V &= V(t_0) \\ e_i &= e_i(t_0), (i=0, 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

于是要求解的问题便成了一个常微分方程组的初值问题了。选定时间步长 Δt 和采用适当的数值求解方法,结合参数分布的计算,便可一步一步算出 $p_o, V, e_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ 及由它们所确定的其它参数随时间的变化,一直可以算到准定常过程结束时为止。

五、算例及其结果的比较和分析

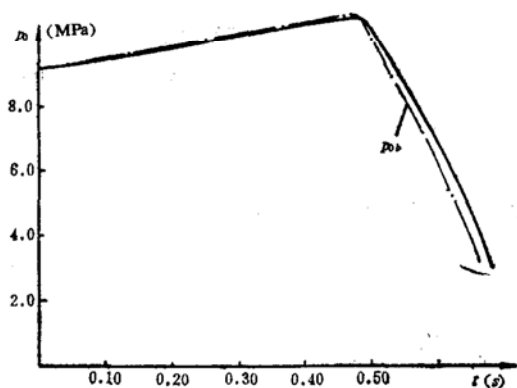


图2 头部压力随时间的变化

1. 算例: 一固体火箭发动机采用两端包覆的圆柱内孔燃烧装药如图1所示,已知数据如下:

1) 装药几何尺寸

内径 $d=3.0\text{cm}$, 外径 $D=4.0\text{cm}$, 长度 $L=108\text{cm}$ 。

2) 喷喉直径 $d_t=1.71\text{cm}$

3) 推进剂及其燃烧产物特性

密度 $\rho_p=1741.3\text{kg/m}^3$,

燃速公式 $r_N=1.1392 \times 10^{-4} p^{0.251}$

• ϵ_r ,

$$\varepsilon_r = 1 + 1.89(\delta - 0.134), \text{ 当 } \delta \leq 0.134, \varepsilon_r = 1,$$

燃烧温度 $T_0 = 3414.3\text{K}$,

比热比 $k = 1.1998$,

气体常数 $R = 305.7\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ 。

2. 计算的初始条件及结果

经过压力建立过程的非定常计算, 当接近平衡条件时, 得到数据如下:

头部压力 $p_0 = 9.1665\text{MPa}$, 自由容积 $V = 8.455 \times 10^{-4}\text{m}^3$,

通道头部直径 $d_0 = 3.14\text{cm}$, 通道末端直径 $d_L = 3.20\text{cm}$

以此为初始数据, 并以相应的时间为初始时刻 $t = 0$, 用平衡解法和非平衡解法的计算机程序作了计算。现将从初始时刻到装药全部燃完时大部压力随时间变化的计算结果表示于图 2 上。同时将计算中所得的气体生成率与喷管流率之差的相对值 Δ 及末端处的侵蚀比 ε_{rL} 随时间的变化表示于图 3 上。

以上所得结果都属于准定常的范畴, 因而都含有准定常处理所带来的偏差。为了更好地进行比较, 我们特意用非定常方法作了部分计算。现将这种计算所得的头部压力 p_{0u} 值及原计算中相应的 p_0 , p_{0b} 值随时间的变化表示于图 4 上。

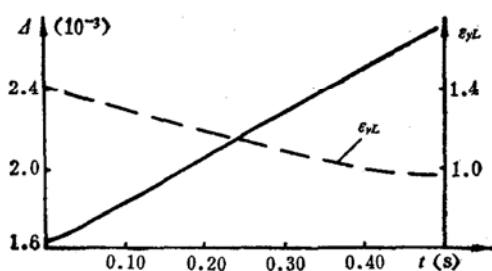


图 3 $\Delta \varepsilon_{rL}$ 随时间的变化

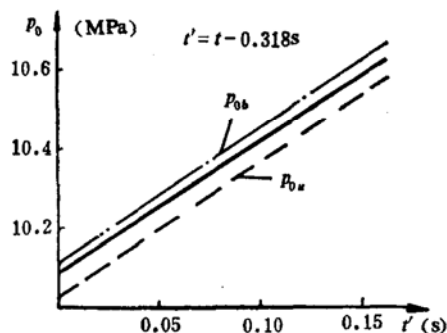


图 4 p_{0u}, p_0, p_{0b} 随时间的变化

3. 结果的比较和分析

1) 由图 2 可以看出, 当压力上升时 p_{0b} 高于 p_0 ; 而当压力下降时 p_{0b} 低于 p_0 。这是由于非平衡状态要向平衡状态趋近, 因而 p_0 要追随着 p_{0b} 而变化。可见这种情形是合理的。

2) 由图 2 还可看出, 曲线头一部分的 p_{0b} 与 p_0 非常接近 (二者数值的相对偏差只有 0.3% 左右)。这是由于在算例的前一阶段中 Δ 的绝对值非常小 (小于 3×10^{-3}), 在较粗略的计算中已接近于平衡解法的控制条件, 故由它引起的 p_0 对 p_{0b} 的偏差很小。可见, 在这种情况下用 p_{0b} 代替 p_0 是完全允许的。

但在曲线的后一部分, 即在装药末端燃完后压力急速下降的过程中, 二者的差就比较大了, 其相对值可超过 5%。这说明此时已不能用 p_{0b} 代替 p_0 , 参数随时间的变化已不是很小的了, 因而准定常条件亦将难以满足。

3) 由图 4 可以看出, 在压力上升期间 $p_{0u} < p_0 < p_{0b}$ 。这说明 p_0 比 p_{0b} 更接近于精确解。不难推知: p_{0b} 对 p_0 的偏差是 $\Delta \neq 0$ 引起的, 而 p_0 对 p_{0u} 的偏差是由于在守恒方程中忽略

对时间的偏导数项所引起的。 p_{00} 有两层偏差,故精度较差。

4) 由图4还可以看出, p_{00} 与 p_0 的差值随时间增大,而 p_0 与 p_{00} 的差值随时间减小。其原因可以从图3中的曲线得到解释:前者是由于 $\angle$ 随时间增大之故;而后者是由于随着侵蚀效应(可用 e_{rL} 代表)减小,因对时间的偏导数项的忽略而引起速度偏差所造成的影响越来越小之故。由此可见,所得结果是合理的。

六、结 论

1. 在一维情况下,压力建立过程之后,装药末端燃完之前,可以认为是准定常工作过程。在这个过程中准定常计算结果与非定常计算结果很接近(非平衡解法的相对偏差只有0.5%左右)。但前者的计算要简单得多,能节省大量的计算机时。故这时采用准定常算法是合理的,而且选取平衡解法也是可以接受的。但在装药末端燃完之后,准定常算法已不再适用,平衡解法则会与精确解偏离更远。这时宜采用非定常解法。

2. 在一维准定常解法中非平衡解法优于平衡解法。

1) 非平衡解法只有准定常处理所带来的偏差,而平衡解法还要带来在一般情况下 $\angle \approx 0$ 所产生的偏差。因而前者的精度优于后者的精度。

2) 非平衡解法较为简便。它只需在计算完参数分布之后多计算两个导数 $\frac{dp_0}{dt}$ 及 $\frac{dV}{dt}$ 即可;而平衡解法在迭代求解 p_{00} 的过程中要多次计算参数的分布。在要求精度较高,沿长度的等分数 n 相当大的计算中,平衡解法所费的机时往往要比非平衡解法多一倍以上。故从计算简便和节省机时的角度来衡量,非平衡解法也优于平衡解法。

参 考 文 献

- (1) 常显奇:固体火箭发动机侵蚀变通道内弹道计算。兵工学报(弹箭分册),No.3,1982。
- (2) 威廉斯, F.A.等著,京固群译:固体推进剂火箭发动机的基本问题,国防工业出版社,1976。

(上接第24页)

六、结 论

1. 在 $H = 0 \sim 40\text{km}$, $M_H = 0 \sim 6.50$ 范围内,涡扇冲压组合发动机性能较好。适用于作为航天飞机载机的发动机。

2. 涡扇冲压组合发动机的接力点马赫数最好用平均推力流量法计算。

3. 在 $M_H = 0 \sim 6.50$ 范围内,如果选取的 $q > 59\text{kPa}$,冲压发动机燃烧室压力 $p_4 > 981\text{kPa}$,应采用新的燃烧室结构型式。

4. q 值的变化对燃烧室静温、来流总温影响较小,设计时可不予考虑。

5. 在不同 q 值条件下,冲压发动机的比冲都在 $M_H = 3.00$ 时达到最大值。

参 考 文 献

- (1) 黄熙君,张津:空天飞机用涡轮风扇——冲压组合发动机的设计研究。《推进技术》,No.1,1988。
- (2) 张堃元,彭成一:风扇冲压发动机性能计算及参数分析。《推进技术》,No.1,1988。

THE DEVELOPMENT OF AIRBREATHING ENGINES USED FOR AEROSPACE AND MISSILES

Liu Xingzhou

(The 31st Research Lab.)

Abstract

In this paper the situation about the development of airbreathing engines used for aerospace and missiles, discussed at AIAA/SAE/ASME/ASEE 24th Joint Propulsion Conference, is presented. The main subjects are as follows: combined engine cycles using airbreathing and rocket propulsion for advanced space transportation, antimatter propulsion, laser-electron ramjet, supersonic transport propulsion technology, airbreathing concepts for high speed tactical missiles, which indicate the prospects of development of airbreathing engines.

Keywords: Space propulsion, Space shuttle main engine, Air breathing engine, Ramjet engine, Turboramjet engine

ONE DIMENSIONAL SEMI-STEADY SOLUTIONS FOR THE INTERNAL BALLISTIC PROBLEM OF SOLID ROCKET MOTORS

Hu Dayi

(National University of Defence Technology)

Abstract

In this paper the one dimensional semi-steady solutions for the internal ballistic problem of solid rocket motors are discussed in particular. It is pointed out that there are two solutions for the above problem, the equilibrium solution and the unequilibrium solution. It is shown with calculations of examples that the unequilibrium solution is better than the equilibrium solution.

Keywords: Solid rocket engine, Interior trajectory calculation, One-Dimensional flow, Quasisteady flow