1989年4月 推 进 技 术 Apr.1989
第 2 期 JOURNAL OF PROPULSION TECHNOLOGY No.2

多级固体火箭发动机总体优化设计

张 鸿 涛

(航空航天部四院41所)

摘 要

本文在文献[1]的基础上提出了一种多级固体火箭发动机总体优化数学模型，并对三级定容发动机进行了计算。对中远程弹道式导弹利用优化模型比经验设计主动段终点速度提高了4%。

主题词：固体火箭发动机，优化，最佳设计，参数最优化

符 号 表

A ——封头表面积系数

Al ——推进剂铝粉含量（%）

B ——封头极孔比

C^*_{th} ——理论特征速度

d_t ——喷管喉径

E_n ——喷管金属体弹性模量

F ——发动机推力

f_p ——燃烧室最大压强与平均压强比

f_u ——壳体可靠性安全系数

g ——重力加速度

H_{o1} ——前接头法兰厚度

H_{o2} ——后接头法兰厚度

J ——裙长与R_c之比

L_m ——发动机总长度

m_{co} ——点火器及外部零体质量

m_{no} ——推力向量控制及附件质量

m_u ——有效载荷质量

n ——压强指数

p_a ——环境压强

p_b ——壳体爆破压强

$\overline{p}_r$ ——泊尔系数

R_c ——壳体外半径

u ——尺寸系数

v ——尺寸系数（肩宽比）

y_1 ——壳体前开口半径

α_c ——壳体线胀系数

α_n ——喷管倒锥半锥角

α_p ——推进剂线胀系数

γ ——平均等熵指数

δ_1 ——喷管扩散段入口厚度

δ_2 ——喷管扩散段出口厚度

δ_{11} ——前接头端面至椭球面厚度

δ_{12} ——后接头端面至椭球面厚度

δ_{in1} ——前封头绝热层厚度

δ_{in2} ——后封头绝热层厚度

δ_{inc} ——圆柱段绝热层厚度

δ_q ——裙的厚度

$\overline{\theta}$ ——弹道倾角

θ_n ——喷管法兰转角

λ ——发动机质量比

μ_n ——喷管金属体泊桑比

ν_p ——推进剂泊桑比

本文1988年3月17日收到

ρ_c ——壳体材料密度

ρ_g ——接头材料密度

ρ_{in} ——绝热层密度

ρ_{n1} ——喷管球头材料密度

ρ_{n2} ——喷管扩散段材料密度

ρ_{n3} ——喷管金属材料密度

ρ_p ——推进剂密度

ρ_q ——前后裙材料密度

σ_{bc} ——壳体材料强度极限

σ_{bg} ——接头材料强度极限

σ_{bn} ——喷管金属材料强度极限

固体发动机单机性能优化固然重要，但对多级固体导弹并非最优。因此，本文根据导弹总体设计要求，针对战略导弹所使用的固体发动机的特点，提出一种多维设计变量的优化数学模型。企图通过计算，选择发动机最佳参数，用于设计。

一、目标函数与设计变量

本文所选优化准则为：对给定有效载荷，在保证发动机容积（直径和长度）一定的条件下，导弹主动段终点速度最大。因此，它的目标函数为导弹飞行的末速度V_k，设计准则为发动机直径D_m和长度L_m分别等于一个常量。

若忽略空气阻力作用，三级火箭的末速度为

$$V_k=\sum_{i=1}^{3}\Delta V_i=\sum_{i=1}^{3}\left[I_{si}\ln R_i-\bar{g}_i t_i\sin\bar{\theta}_i\right] \qquad (1)$$

1. 质量分析

导弹的结构比

$$\begin{cases}R_1=(m_{u1}+m_{m1}+m_{m2}+m_{m3})/(m_{u1}+m_{s1}+m_{m2}+m_{m3})\\ R_2=(m_{u2}+m_{m2}+m_{m3})/(m_{u2}+m_{s2}+m_{m3})\\ R_3=(m_{u3}+m_{m3})/(m_{u3}+m_{s3})\end{cases} \qquad (2)$$

发动机质量

$$m_m=m_s+m_p \qquad (3)$$

发动机壳体质量

$$m_s=m_c+m_{in}+m_n \qquad (4)$$

发动机结构质量

$$m_c=m_{co}+2\pi R_c\delta_c\rho_c\left(L_c+AR_c-\frac{1}{4}BR_c\right)+\sum_{i=1}^{2}m_{gi}+4\pi\rho_q J\delta_q R_c^2 \qquad (5)$$

式中 $\delta_c=f_u f_p p_c R_c/\sigma_{bc}$ (6)

按设计准则，发动机长度是预先给定的。因此，定义壳体圆柱段长度和喷管从喉部至出口段长度之和等于一个常量L_0，则

$$L_c=L_0-L_{nH}=L_0-\bar{L}\sqrt{4A_t/\pi} \qquad (7)$$

对双圆弧喷管，无因次长度为

$$\bar{L}=\frac{1}{2}E\sin\theta_m+\frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon}-1-E+E\cos\theta_m\right)\mathrm{ctg}\,\frac{\theta_m+\theta_{ex}}{2} \qquad (8)$$

燃烧室压强可由下式表示

$$p_c=98.0665\eta_c^* C_{th}^*(m_{po}+DL_c)/gA_t t \qquad (9)$$

所以，对于定长发动机，喷管喉面A_t可由式（7）和（9）联立求解。

式中 $D=\pi\rho_p(1-1/m^2)(1-f_u f_p p_c/\sigma_{bc})^2 R_c^2$ (10)

$$\eta_c^* = 0.982(a p_c^n)^{0.01643} \tag{11}$$

壳体前后接头质量

$$m_{gi}=\pi\rho_g\left\{r_i^2\delta_{1i}-y_i^2(\delta_{1i}+\delta_{2i})+\frac{1}{6}\left[(2b_0^2+r_i^2)\sqrt{b_0^2-r_i^2}-(2b_0^2+R_i^2)\sqrt{b_0^2-R_i^2}\right]\right\} \tag{12}$$

式中下标i表示前后接头参数，$i=1$表示前接头，$i=2$表示后接头。

$$y_2=r_2-H_{02} \quad (13) \qquad r_2=ud_t \quad (14)$$

$$R_i=vr_i \quad (15) \qquad b_0=R_c-\delta_c \quad (16)$$

$$\delta_{2i}=\left\{\frac{3P_{0i}}{4\sigma_{bg}}\left[16R_i^4\ln\frac{R_i}{r_i}-6R_i^4+2r_i^4+4R_i^2r_i^2)/(4R_i^2+2r_i^2)\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{17}$$

$$P_{0i}=\frac{r_i^2}{R_i^2-r_i^2}f_u f_p p_c \tag{18}$$

绝热层、人工脱粘层及衬层质量

$$m_{in}=\pi\rho_{in}(R_c-\delta_c)[2\delta_{inc}L_c+A(R_c-\delta_c)(\delta_{in1}+\delta_{in2})] \tag{19}$$

喷管质量

对于深潜入喷管，可按如下简化模型计算。

喷管球头质量

$$m_{n1}=3.656\rho_{n1}d_t^3 \tag{20}$$

双圆弧喷管的扩散段质量

$$m_{n2}=\pi\rho_{n2}\left\{(R_{02}^2-R_{01}^2+H_2^2-H_1^2)L_3-H_2\left[b\sqrt{R_{02}^2-b^2}-a\sqrt{R_{02}^2-a^2}+R_{02}^2\left(\sin^{-1}\frac{b}{R_{02}}-\sin^{-1}\frac{a}{R_{02}}\right)\right]+H_1\left[b\sqrt{R_{01}^2-b^2}-a\sqrt{R_{01}^2-a^2}+R_{01}^2\left(\sin^{-1}\frac{b}{R_{01}}-\sin^{-1}\frac{a}{R_{01}}\right)\right]\right\} \tag{21}$$

式中

$a=R_{01}\sin\theta_{ex}$

$b=R_{01}\sin\theta_m$

$c=R_t(E+1-E\cos\theta_m)+\delta_1$

$d=R_t\sqrt{\varepsilon}+\delta_2$

$R_{01}=L_3/(\sin\theta_m-\sin\theta_{ex})$

$R_{02}=[a^2+(d+H_2)^2]^{\frac{1}{2}}$

$H_1=R_{01}\cos\theta_m-R_t(E+1-E\cos\theta_m)$

$H_2=(b^2+c^2-a^2-d^2)/2(d-c)$

$L_3=R_t\left[\sqrt{\varepsilon}-(E+1-E\cos\theta_m)\right]$

$\mathrm{ctg}\dfrac{\theta_m+\theta_{ex}}{2}$

$E=R_m/R_t$

喷管倒锥及法兰盘质量

$$m_{n3}=\pi\rho_{n3}\left[H_1L(2h-H_1)+\frac{H_2}{\sin\alpha_n}(y_2^2-h^2)+H_{02}H_3(2r_2-H_{02})\right] \tag{22}$$

式中　y_2和r_2分别由（13）和（14）式计算，

$L=2d_t$

$h=7d_t/6$

$H_1=(h/\sigma_{bn}f_uf_pp_c$

$$H_2=\frac{0.846(1-\mu_n{}^2)^{0.297}[(y_2-h)/\sin\alpha_n]^{0.375}}{E_n{}^{0.406}}\left(\frac{h+y_2}{\cos\alpha_n}\right)^{0.625}$$

$$\times(f_uf_pp_c)^{0.406} \tag{24}$$

将（24）式代入得

$$\sigma_{cr}=y_2f_uf_pp_c/H_2\cos\alpha_n \tag{25}$$

若$\sigma_{cr}\leqq\sigma_{bn}$，则$H_2$为所求之值。若$\sigma_{cr}>\sigma_{bn}$，$H_2$应由下式求出

$$H_2=y_2f_uf_pp_c/\sigma_{bn}\cos\alpha_n \tag{26}$$

H_3由法兰弯矩和转角方程式解出：

$$\frac{1-\mu_n^a}{2\beta_0y_2H_2{}^3}\ln\frac{r_2}{y_2}H_3{}^3+\frac{\beta_0}{2}H_3+\left(1-\frac{P_0H_{02}}{2\beta_0D_0\theta_n}\right)=0 \tag{27}$$

式中　$P_0=0.5y_2f_uf_pp_c$

$D_0=E_nH_2^3/12(1-\mu^2{}_n)$

$$\beta_0=\sqrt[4]{\frac{3(1-\mu_n{}^2)}{y_2{}^2H_2{}^2}}$$

喷管总质量

$$m_n=m_{n0}+m_{n1}+m_{n2}+m_{n3} \tag{28}$$

推进剂质量

假定绝热壳体前后封头为椭球封头，椭球比为m_1，前后封头装药体积 装填分数为 η_p，则推进剂质量为

$$m_p=m_{po}+DL_c \tag{29}$$

$$m_{po}=\frac{4}{3}\pi b^3\eta_p\rho_p/m_1 \tag{30}$$

式中　$b=R_c-\delta_c-\delta_{inc}$；$\delta_c$，$D$，$L_c$分别由（6）、（10）和（7）式求出。

2. 比冲分析

比冲

$$I_s=\eta_{Is}I_{sth}=\eta_{Is}C^*_{th}C_{Fth} \tag{31}$$

式中　特征速度C^*_{th}视为常量，由热力计算提供。

比冲效率η_{Is}采用文献〔2〕的经验公式。对于地面（一级发动机）比冲

$$\eta_{Is}=1.01739+0.0086\ln d_t-0.02513\ln\beta-0.2207\mathrm{Al}-0.003293\ln\varepsilon \tag{32}$$

对于二、三级发动机的真空比冲

$$\eta_{Is}=1.09439+0.01239\ln d_t-0.03553\ln\beta-0.2471Al$$
$$-0.005448\ln\varepsilon+0.008054\ln(1-s)-0.002976\ln A^*$$
$$-0.004868\ln p_c+0.004393\ln R_u \tag{33}$$

式中 $\beta=(\bar{\theta}_1+2\theta_{ex})/3$ (34)

$\bar{\theta}=\mathrm{arctg}[d_t(\sqrt{\varepsilon}-1)/2L_{nH}]$ (35)

$S=L_s/L_p$ (36)

$A^*=A_{in}/A_t$ (37)

$R_u=R_1/R_t$ (38)

$L_s=L_{nH}+d_t-L_m+\delta_{11}+\delta_{12}+L_p$ (39)

$L_p=0.5\sqrt{b^2-y_1^2}+0.5\sqrt{b^2-y_2^2}+L_c$ (40)

理论推力系数

$$C_{Fth}=\Gamma\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\sqrt{1-\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}+\varepsilon\frac{p_e-p_a}{p_c} \tag{41}$$

式中
$$\Gamma=\sqrt{\gamma}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}$$

$$\varepsilon=\Gamma/\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\sqrt{1-\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

3. 设计变量

针对目标函数及上述诸方程，提出如下10个设计变量：

p_c ——(X_1，燃烧室压强)

ε ——(X_2，喷管膨胀比)

t ——(X_3，发动机工作时间)

m ——(X_4，装药肉厚比)

θ_m ——(X_5，喷管初始扩散半角)

θ_{ex} ——(X_6，喷管出口半角)

R_u ——(X_7，喷管喉部上游曲率半径R_1与喉部半径R_t之比)

E —— X_8，喷管喉部下游曲率半径R_m与喉部半径R_t之比)

N ——(X_9，翼柱形药型翼片数目)

φ ——(X_{10}，药型图中的 φ 角)

这里，设计变量N和φ出现在压强比f_p公式中，将在约束条件中加以讨论。

若以向量形式表示（下标 i 表示发动机级数），三级定容发动机设计变量为

$$\boldsymbol{X}=(p_{ci},\ \varepsilon_i,\ t_i,\ m_i,\ \theta_{mi},\ \theta_{exi},\ R_{ui},\ E_i,\ N_i,\ \varphi_i)^T$$
$$=\boldsymbol{X}_{1i},\ \boldsymbol{X}_{2i},\ \boldsymbol{X}_{3i},\ \boldsymbol{X}_{4i},\ \boldsymbol{X}_{5i},\ \boldsymbol{X}_{6i},\ \boldsymbol{X}_{7i},\ \boldsymbol{X}_{8i},\ \boldsymbol{X}_{9i},\ \boldsymbol{X}_{10i})^T \tag{42}$$

二、约 束 条 件

本文约束条件为总体提出的技术要求及保证发动机正常工作的条件。这里包括导弹总体对三级发动机比冲、喷管膨胀比、工作时间的限制；内弹道、壳体结构可靠性、药柱强度、推进剂燃速的要求以及喷管型面设计准则的约束等。

壳体结构可靠性可按应力-强度可靠性模型理论提出如下约束方程

$$\mu_c\mu_R-u^*\sqrt{\sigma_c^2+\sigma_R^2}\geqslant 0$$

令 $f_u=\mu_c/\mu_R$，$\mu_c=p_b$，$\mu_R=f_p p_c$ 可得

$$p_c\geqslant u^*\sqrt{\sigma_c^2+\sigma_R^2}/(f_u-1)f_p \tag{43}$$

式中 u^* 为标准正态分布的分位数点。当可靠度 q^* 要求一定时，u^* 值可从正态分布表中查

得。$\sqrt{\sigma_c^2+\sigma_R^2}$ 为可靠性裕度的总体标准差，由试车测试精度、壳体材料及工艺决定。

当推进剂选定后，内弹道曲线的平稳程度主要取决于燃面的调整。因此，发动机的压强比可受到如下方程的限制。

$$f_p = p_{max}/p_c = (A_{bmax}/\bar{A}_b)^{\frac{1}{1-n}} \leqslant f_{pmax} \tag{44}$$

式中 $A_{bmax}(m, N, \varphi)$、$\bar{A}_b(m, N, \varphi)$分别表示最大燃面和平均燃面，是 m、N、φ 的函数。f_{pmax} 为预先规定的最大压强比。

同时，在优化程序中还必须考虑如下两种情况的药柱结构完整性。

（1）药柱在硫化降温过程中，圆管形药柱内孔产生的周向应变为

$$\frac{\varepsilon_\theta}{\Delta T} = -\bar{p}_r \frac{(1+\gamma_p)(m^2-1)(\alpha_p-\alpha_c)}{1+m^2(1-2\gamma_p)} \tag{45}$$

当给定不同的使用温度T后，即可求得不同 m 值下的$\varepsilon_\theta(T)$，由药柱硫化时间 t_1，求得不同的应变率$R=\varepsilon_\theta(T)/t_1$及$\lg R$。再由公式

$$\lg a_T = -8.86(T-T_s)/(101.6+T-T_s) \tag{46}$$

进而求得$\lg(1/a_T R)$，并作出$\lg(1/a_T R)\sim\varepsilon_\theta$曲线。再在推进剂主应变曲线上找到对应于$\lg(1/a_T R)$的$\varepsilon_m$，这样即可获得硫化降温安全系数

$$f_1(m) = \frac{\varepsilon_m}{1.15\varepsilon_\theta} \geqslant f_{1min} \tag{47}$$

式中，f_{1min}为预先给定的硫化降温临界安全系数。

（2）对于翼柱形药型的槽尖部位产生裂纹问题，将由下面的应力集中系数K_1来控制。

$$K_1 = \frac{m^2-1}{2m^2}\sqrt{\frac{m+1}{m-1}}\left(1+2\sqrt{\frac{2b}{md}}\right)N^{-\frac{1}{3}} \leqslant K_{1max} \tag{48}$$

式中，b 为装药外半径，由(30)求得，m 为肉厚比，d 为翼片宽度。

加之设计变量的界限约束，具体约束方程为

$$\left.\begin{array}{ll}
I_{smin} - I_s(X) \leqslant 0 & t_{min} \leqslant t \leqslant t_{max} \\
f_p(X) - f_{pmax} \leqslant 0 & \varepsilon_{min} \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_{max} \\
f_{1min} - f_1(X) \leqslant 0 & \theta_{mmin} \leqslant \theta_m \leqslant \theta_{mmax} \\
K_1(X) - K_{1max} \leqslant 0 & \theta_{exmin} \leqslant \theta_{ex} \leqslant \theta_{exmax} \\
\dfrac{u^*\sqrt{\sigma_c^2+\sigma_R^2}}{(f_u-1)f_p} - p_c \leqslant 0 & R_{umin} \leqslant R_u \leqslant R_{umax} \\
 & E_{min} \leqslant E \leqslant E_{max} \\
\dfrac{(m-1)b}{mt_{max}} \leqslant a p_c^n \leqslant \dfrac{(m-1)b}{mt_{min}} & N_{min} \leqslant N \leqslant N_{max} \\
 & 0° \leqslant \varphi \leqslant 90°
\end{array}\right\} \tag{49}$$

三、数学模型

根据优化准则、设计参量分析以及确定的设计变量和约束条件，即可建立起优化数学模型。

因此，对于三级定容发动机的优化设计问题，就变为求设计变量

$$X=(X_{1i}, X_{2i}, \cdots, X_{10i})^T, \quad X\epsilon E^{30}$$

满足约束条件（49）式，使得目标函数$f(X)=-V_K(X)$取最小值。

四、简化的算例及分析

上述数学模型，可用罚函数法进行求解。但在设计变量中，对目标函数影响最大的是p_c和ε（或p_e/p_c）。为简化计算，将其它设计变量均视为常量，既节省机时又可得到有用的计算结果。如果再去掉比冲不等式约束方程，就将有约束的优化问题，化为无约束的优化问题。因此三级定容发动机的优化设计，就变为求设计变量

$$X=[p_{c1}, p_{c2}, p_{c3}, (p_e/p_c)_1, (p_e/p_c)_2, (p_e/p_c)_3]^T$$
$$=(X_1, X_2, \cdots, X_6)^T, \quad X\epsilon E^6$$

使得目标函数$f(X)=-V_K(X)$取最小值。

利用坐标轮换法和BCM-S_{68}K算机，仅几分钟时间就算出了三级发动机较满意的计算结果，并列于下表中。

算例输入变量及输出主要数据表

方案		优化方案Ⅰ			比较方案Ⅱ		
级数		Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
输入	p_e/p_c (X°)	0.008	0.0042	0.0042	0.0136	0.0042	0.0028
	p_c (X°)	8336	5884	6374	6865	4903	3923
输出	p_e/p_c	0.034	0.008	0.008	0.0136	0.0042	0.0028
	p_c (kPa)	9807	8336	8532	6865	4903	3923
	ε	5.00	15.12	15.12	10.00	25.14	34.74
	λ	0.9226	0.9107	0.9051	0.9252	0.8980	0.8784
	F (kN)	886.8	588.6	139.4	794.7	483.3	102.8
	ΔV (m/s)	1724	3352	2485	1849	3332	2079
V_k (m/s)		7561			7260		

表中方案Ⅱ是为和优化方案Ⅰ比较而将p_c和p_e/p_c作为常量输入计算的。

由此可知，方案Ⅰ比方案Ⅱ主动段终点速度将增加300m/s，提高了4%。这主要是由于三级发动机膨胀比减小，壳体圆柱段加长增加推进剂质量的原故。因此，对定容导弹所用各级发动机（在未考虑延伸喷管情况下）喷管膨胀比不宜过大，使其节省的长度用于增加推进剂质量，实现增大射程的目的。

参考文献

〔1〕张鸿涛：多级固体火箭发动机最佳参数选择，《固体火箭推进》，第1期，1984年。

〔2〕张鸿涛：固体火箭发动机比冲预示经验法，中国宇航学会报告，CSA PR-87-RP05，1987年。

THE MODEL OF COMBUSTION EFFICIENCY AND CALCULATION OF FLOW PROPERTIES FOR SCRAMJET COMBUSTOR

Liu Ling Zhang Zhen Niu Haifa Liu Jinghua

(Northwestern Polytechnical University)

Abstract

The model of combustion efficiency for scramjet combustor is analyzed and presented in this paper. The model involves effect factors of fuel injection, entrance conditions and combustor configuration. Using the model of combustion efficiency the resulting (one-dimensional) flow properties is computed step by step through the combustor. The comparisor of the experimental results and theoretical predictions indicates that the theory is adequate.

Keywords: Supersonic Combustion ramjet engine, Combustion chamber, Mathematical model, Computation

INTEGRAL PERFORMANCE OPTIMUM DESIGN FOR MULTISTAGE SOLID PROPELLANT ROCKET MOTORS

Zhang Hongtao

(Shaanxi Power Machinery Institute)

Abstract

A mathematical model for integral performance optimization of multistage solid propellant rocket motors is established, based on referance[1], and a calculation with a three-stage volume-fixed solid propellant rocket motor, as a example, is presented in this paper. It is shown that the velocity at burnout of intermediate/long range ballistic missile calculated with this model is 4% greater than that with usual empirical method.

Keywords: Solid rocket engine, Optimization, Optimum design, Parameter optimization