

有关谱估计公式的讨论

庄书田

(航天管理学院)

摘 要

本报告给出了加Hanning窗的谱估计公式的证明,同时对谱估计公式应用和能量补偿问题做了一定的研究。

主题词: 谱, 频谱分析, 光谱测量, 测试技术

符 号 表

$x(t)$ ——样本函数	N ——每帧采样点数, $N = 2^r$, r 为 正整数
$W(t)$ ——窗函数	Δt ——采样周期, $T = N\Delta t$
$X(f)$ —— $x(t)$ 的富氏变换	B ——分辨带宽, $B = \Delta f = \frac{1}{T}$
$G_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$	$\Leftrightarrow$ ——富氏对 $x(t) \Leftrightarrow X(f)$
$G_{xx}(f)$ ——单边自谱密度函数	下标
t ——时间(s)	Box——Box窗
f ——频率(Hz)	Han——Hanning窗
T_m ——样本记录总长	上标
L_m ——样本记录分段数——帧数	L ——表示第 L 帧
T ——每帧长度, $T_m = L_m T$	

一、概 述

自快速富氏变换(FFT)问世以来,在有限区间上进行谱估计时,人们普遍采用如下定义:

$$G_{xx}(f) = \frac{2}{T} |X(f, T)|^2 \quad (1)$$

式中

$$X(f, T) = \int_0^T x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

谱分析表明,用(1)式进行谱估计会造成较大的能量泄漏,从而导致谱估计的异常,对

正弦信号和窄带随机信号尤为严重。为抑制泄漏、改善谱估计，许多数据处理家对加窗技术做了广泛的研究，并已给出较完善的谱估计公式。例如：文献[1,2]给出的加Hanning窗的谱估计公式为

$$\tilde{G}_{xx}(f) = \frac{2\Delta t}{NL_m} K^* \sum_{L=1}^{L_m} |X_{Han}(K)|^2 \quad (2)$$

式中 $K^* = 8/3$ ——能量补偿因子， $X_{Han}(K)$ 见下文。

文献[12]指出，加窗的目的在于，对时间信号的二端进行削锥以改善谱估计。所谓削锥就是把信号乘以窗函数，它相当于对原始富氏变换施加卷积运算。

从频域上讲，削锥的作用在于，对原始变换得到的有效滤波器的最大旁瓣进行压制，以减少泄漏；从时域上讲，削锥的作用在于，将有限长时间历程潜在不连续的二端修理圆滑。

本文仅对加Hanning窗的谱估计公式和能量补偿问题做进一步的研究，并给出这些公式的证明。

二、 $[0, T]$ 区间上的富氏谱估计

为得到(2)式中的 $X_{Han}(K)$ ，首先应确定Box窗函数和Hanning窗函数的富氏之间的关系式。

给定窗函数 $W_{Box}(t)$ 和 W_{Han} 为

$$W_{Box}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$W_{Han}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\pi Bt), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (3)$$

若 $W_{Box}(t) \Leftrightarrow W_{Box}(f)$ ， $W_{Han}(t) \Leftrightarrow W_{Han}(f)$ ，则

$$W_{Box}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{Han}(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^T e^{-j2\pi ft} dt$$

$$W_{Han}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{Han}(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^T \frac{1}{2}(1 - \cos 2\pi Bt) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^T e^{-j2\pi ft} dt - \frac{1}{4} \int_0^T e^{-j2\pi(f-B)t} dt - \frac{1}{4} \int_0^T e^{-j2\pi(f+B)t} dt$$

在 $W_{Box}(f) \int_0^T e^{-j2\pi ft} dt$ 中，用 $f \pm B$ 代替 f ，可得 $W_{Box}(f \pm B) = \int_0^T e^{-j2\pi(f \pm B)t} dt$ ，于是我们便得到 $W_{Han}(f)$ 和 $W_{Box}(f)$ 之间的关系式

$$W_{Han}(f) = \frac{1}{2} W_{Box}(f) - \frac{1}{4} W_{Box}(f-B) - \frac{1}{4} W_{Box}(f+B) \quad (4)$$

借助于(4)式，我们可以导出(2)式中 $X_{Han}(K)$ 的表达式。

对于任意非周期函数 $x(t)$ 及 $x_{Han} = x(t) \cdot W_{Han}(t)$ ，若 $x(t) \Leftrightarrow X(f)$ ， $x_{Han}(t) \Leftrightarrow X_{Han}(f)$ ，依频域卷积定理，有

$$X_{\text{Han}}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{\text{Han}}(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot W_{\text{Han}}(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ = X(f) \bullet W_{\text{Han}}(f) \quad (\bullet \text{——卷积运算}).$$

利用(4)式可得

$$X_{\text{Han}}(f) = \frac{1}{2} X(f) \bullet W_{\text{Box}}(f) - \frac{1}{4} X(f) \bullet W_{\text{Box}}(f-B) - \\ - \frac{1}{4} X(f) \bullet W_{\text{Box}}(f+B)$$

借助于 δ 函数和卷积的性质, $X(f) \bullet W_{\text{Box}}(f-B) = [X(f) \bullet W_{\text{Box}}(f)] \bullet \delta(f-B)$,

又 $X(f) \bullet W_{\text{Box}}(f) = X_{\text{Box}}(f)$,

所以 $X(f) \bullet W_{\text{Box}}(f-B) = X_{\text{Box}}(f) \bullet \delta(f-B) = X_{\text{Box}}(f-B)$ 。

同理, $X(f) \bullet W_{\text{Box}}(f+B) = X_{\text{Box}}(f+B)$,

$$\text{于是, } X_{\text{Han}}(f) = \frac{1}{2} X_{\text{Box}}(f) - \frac{1}{4} X_{\text{Box}}(f-B) - \frac{1}{4} X_{\text{Box}}(f+B) \quad (5)$$

对于离散情形, 若 $f_K = KB$, 且记 $X(f_K) = X(K)$, 则(5)式化为:

$$X_{\text{Han}}(K) = \frac{1}{2} X_{\text{Box}}(K) - \frac{1}{4} X_{\text{Box}}(K-1) - \frac{1}{4} X_{\text{Box}}(K+1) \\ (K = 2, 3, \dots, N-1) \quad (6)$$

(6)式是实际计算中使用的公式, 当 $K=1$ 时, 取 $X_{\text{Han}}(1) = X_{\text{Box}}(1)$ 。

三、能量补偿问题

对时间历程削锥的结果, 势必造成能量损失, 为保持总能量不变, 必须进行能量补偿, 引进所谓的能量补偿因子 K_L 。

因为加窗前的总能量为 $\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$, 加Hanning窗后的总能量为 $\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) \cdot$

$W_{\text{Han}}^2(t) dt$, 为保持加窗前后总不变, 则须使

$$\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{K_L}{T} \int_0^T x^2(t) \cdot W_{\text{Han}}^2(t) dt,$$

于是便得到能量补偿因子 K_L 的理论公式

$$K_L = \int_0^T x^2(t) dt / \int_0^T x^2(t) \cdot W_{\text{Han}}^2(t) dt \quad (7)$$

将(7)式引入(2)式, 便得到谱估计的最后公式

$$\tilde{G}_{xx}(K) = \frac{2\Delta t}{NL_m} \sum_{k=1}^{L_m} K_L |X_{\text{Han}}(K)|^2 \quad (8)$$

对于能量补偿因子, 许多数据处理家常采用近似公式

$$K^* = T / \int_0^T W^2(t) dt,$$

不同的窗函数, K^* 的值也不相同。例如, 对 Hanning 窗, $K^* = 8/3$, 对 Hamming 窗,

$K^* = 2.516$; 对1/10余弦坡度窗, $K = 1.143$ 。

不难证明, 使用 K^* 进行谱估计造成的误差为

$$\varepsilon = \left| \frac{\tilde{G} - \tilde{G}^*}{\tilde{G}} \right| = \frac{1}{\bar{K}} \left| \bar{K} - K^* \right|$$

式中 $\bar{K} = \frac{1}{L_m} \sum_{L=1}^{L_m} K_L$, $\tilde{G}$ 和 $\tilde{G}^*$ 分别为使用(7)式和 K^* 得到的谱估计。实际计算表明, 对不同的数据类型, ε 可能是很大的, 有的情况甚至达10%以上。

鉴于使用(7)计算 K_L 付出的代值远小于整个谱估计的代价, 所以对于情况不清的数据建议使用(7)式。

四、对称区间上的谱估计公式

在对称区间 $[-T/2, T/2]$ 上, 给定 $x(t)$ 及窗函数

$$W_{\text{Box}}(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T/2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}; \quad W_{\text{Han}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\pi et), & |t| \leq T/2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (9)$$

若记 $x_{\text{Han}}(t) = x(t) \cdot W_{\text{Han}}(t)$, $x_{\text{Box}}(t) = x(t) \cdot W_{\text{Box}}(t)$, 重复第二段的推导, 可得

$$X_{\text{Han}}(f) = \frac{1}{2} X_{\text{Box}}(f) + \frac{1}{4} X_{\text{Box}}(f - B) + \frac{1}{4} X_{\text{Box}}(f + B),$$

对于离散情况, 类似也有

$$X_{\text{Han}}(K) = \frac{1}{2} X_{\text{Box}}(K) + \frac{1}{4} X_{\text{Box}}(K - 1) + \frac{1}{4} X_{\text{Box}}(K + 1) \quad (10)$$

请注意, (10)式与(6)式后二项符号不同。

五、谱估计公式讨论

1. 时间原点选择对谱估计的影响

对于长度为 T 的一段时间历程, 若记原点取在区间左端点的函数为 $x_T(t)$, 原点取在区间中点的函数为 $x_{T/2}(t)$, 它们分别加窗(3)式和(9)式后相应的富氏谱为 $X_{\text{Han}, T}(f)$ 和 $X_{\text{Han}, T/2}(f)$ 。不难证明

$$X_{\text{Han}, T}(f) = X_{\text{Han}, T/2}(f) \cdot e^{-j\pi f T} \quad (11)$$

(11)式表明, 二者模数相同。由(1)式可知, 时间原点的选择对谱估没有影响。

2. 对(6)式和(10)式的分析

就公式本身而言, (6)式和(10)式都是正确的, 但适用范围不同, (6)式适于区间 $(0, T)$, (10)式适于区间 $[-T/2, T/2]$ 。下文的分析表明, 若在区间 $(0, T)$ 上误用(10)式, 势必导致谱估计的严重错误。

通常, 谱分析的其它公式都是在 $(0, T)$ 上建立的, 若使用(10)式, 这些公式都要做相应的变动, 所以在计算中我们使用(6)式。

请注意, (6)式中权系数之和为零而不是1, 这是由于 $X_{\text{BOX}}(f)$ 是复谱的缘故, 否则当 B 充分小时, 计算结果将是“一堆零”了。

3. 在 $(0, T)$ 区间上使(10)式的结果分析

如一时疏忽, 在 $(0, T)$ 区间上误用(10)式, 不难证明, 在谱估计中造成的误差正比于

$$|X_{\text{BOX}}(K)| \ll |X_{\text{BOX}}(K-1)| \cos(\theta_K - \theta_{K-1}) + |X_{\text{BOX}}(K+1)| \cos(\theta_{K+1} - \theta_K) \quad (12)$$

式中 $X_{\text{BOX}}(K)$ 由(6)式规定, θ_K 是 $X_{\text{BOX}}(K)$ 的幅角。显然, (12)式不可能恒等于0, 所以误用(10)式会造成谱估计的严重错误。

六、结果分析

本报告提出的方法已付诸应用, 对 $\times \times$ 型号发动机试车数据做了实时采集和大量处理, 给出较有价值的结果。

为验证方法的正确性, 首先我们对三角形波将谱估计的结果同精确解做了比较。对于三角形波

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$G_{xx}(f)$ 的精确解为

$$G_{xx}(f) = (\sin \pi f / \pi f)^4$$

计算结果表明, 按(8)式得到的谱估计值与精确解相当好地符合。表1给出前五个峰值的比较。

表1 估计值与精确解峰值比较

峰值点	1	2	3	4	5
精确解	1	0.2092×10^{-2}	0.2628×10^{-3}	0.6841×10^{-4}	0.2504×10^{-4}
估计值	1	0.2094×10^{-2}	0.2635×10^{-3}	0.6875×10^{-4}	0.2524×10^{-4}

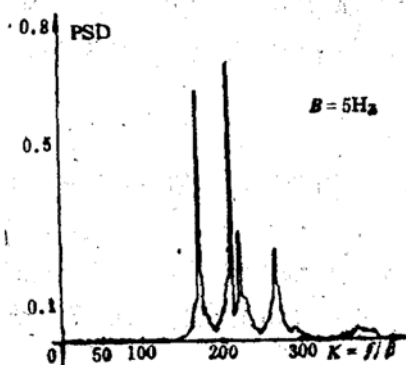


图1 本文的谱估计

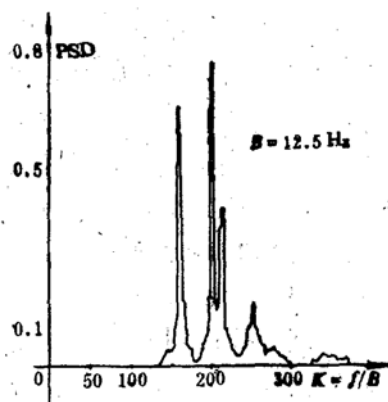


图2 SD373的谱估计

为核证计算结果的可靠性,我们将七组试验数据在SD 375 动态分析仪Ⅰ上进行了处理,并与我们的结果做了比较。结果分析表明,用这二种方法得到的谱估计较好地符合。由于SD375是一台功能较强的动态分析仪,从而核证了本文结果的正确性。图1、2给出其中一组最重要结果的比较。

由图1、2可知,二种处理结果的谱型一致,只是峰值的位置和高度略有差异。造成这种差异的主要原因是:初值不一致和分辨率不相同。由于试验数据是由磁记录仪在一分钟内记录下来的随机数据,而每次只能处理 $T_m = 2s$ 的一段(计算机容量不够),所以二种办法取到相同的初值。同时,B不相同,谱估计的精度也不相同。

表2给出相应的峰值及其位置,表中 f 表示峰值位置, G_m 表示峰值,上标“—”表示SD375的结果。

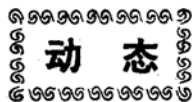
由表2可知,SD375的结果相当于将本文的结果沿 f 轴向左平移60Hz。七组结果的比较大致相同,大约有半数向右平移,但幅度不超过100Hz,这对随机数据来说是令人满意的。

表2 二种处理结果的比较

f	860.0	1060.0	1105.0	1325.0
G_m	0.6344	0.6872	0.2756	0.2268
$\overline{f}$	812.5	1000.0	1037.5	1250.0
$\overline{G_m}$	0.6520	0.7640	0.3880	0.1630

参 考 文 献

- (1) Otnes, R.K., Enochson, L.: 数字时间序列分析, 王子仁, 马忠安译, 国防工业出版社, 1982。
- (2) Bendat, J.S., Piersol, A.G.: 随机数据分析方法, 凌福根译, 国防工业出版社, 1976。



第三个多国联合公司为MSOW承包发动机研制

已经有二个跨国联合公司为NATO的防区外发射的模式武器系统(MSOW)承包发动机的研制工程。一个由美国国际威廉公司、英国罗耳斯-罗伊斯公司和西德的KHD公司组成,另一个由美国特里达因公司、法国微型涡轮公司和英国爱姆公司组成。

第三个为MSOW承包发动机研制的多国联合公司由美国加雷特涡轮发动机公司、法国透博默卡公司和西德MTU公司组成。该联合公司提出了一种称为ETJ-1081的发动机设计方案,参加选择动力装置的竞争。

ETJ-1081方案首先是1984年由美国加雷特公司提出的,是一种积木式发动机,能满足MSOW的三种任务的要求。它既可以对付固定目标远程任务或近程任务,还可以对付活动目标近程任务。这是一种推力为4448N(1000磅)级的一次性使用的亚音速涡轮喷气发动机,其结构和性能尚处于严格的保密中。

龙玉珍(摘译自Aerospace Daily, 1987.12.11, p.382)

frequency-temperature (time-temperature) equivalence, and relations between dynamic and static viscoelasticities. This paper is available to the analysis and the computation of grain structural integrity in solid rocket engines.

Keywords: Viscoelasticity, Double base propellant, Mechanical property, Propellant grain, Structural integrity

EXPERIMENTAL RESEARCH ON MINIMUM SMOKE COMPOSITE SOLID PROPELLANT

Li Shufen Xia Younan

(University of Science and Technology of China)

Abstract

The effects of exhausts produced by burning solid composite propellants in combustors on the attenuation of laser, infrared, visible light and microwave signals are investigated experimentally. The results are also analysed and explained theoretically. It is found that:

(1) The more Al powders the propellants contain, the greater is the attenuation.

(2) The attenuation goes up as the combustion pressure is increased. The attenuation of microwave signals is found least among them.

(3) The attenuation is relative to AP or Al particle size distribution. With fine Al particles, the component of fine AP (<180 mesh) should be less than 20% for laser, infrared light and visible light, and that of fine AP should be more than 40% for microwave.

The relations among the signal attenuations, the size distributions of combustion residue and the content percentage of Al in the combustion residue ($\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$) are also discussed in this paper.

Keywords: Composite propellant, Smokeless propellant, Signal fading

A DISCUSSION ON FORMULAS ESTIMATING POWER SPECTRUM

Zhuang Shutian

(Management Institute of Space)

Abstract

In this paper, the demonstration of formulae estimating power spectrum added with Hanning window is conducted. The application of these formulae and the