

固体火箭发动机一维非定常两相 喷管流场计算

张为华 方丁酉 代绪恒

摘 要

本文采用 MacCormack 预校二步差分格式对一维非定常两相流动喷管进行了数值求解, 得到了固体火箭发动机压力建立过程中气相和凝相颗粒参数的变化规律。

主题词: 固体火箭发动机, 非定常流, 二相流, 喷管气流, 计算

符 号 表

A_1 通道横截面积	m^2	r_t 喉道半径	m
A_b 燃烧面积	m^2	T 温度	K
A_t 喉通截面积	m^2	M 质量	kg
b 推进剂燃速系数	m/s	V 体积	m^3
c 音速	m/s	T_c 燃烧温度	K
C_p 定压比热	$J/kg \cdot K$	t 时间	s
C_s 凝相比热	$J/kg \cdot K$	v 速度	m/s
e 气体单位体积焓	N/m^2	ρ 密度	kg/m^3
e_p 颗粒单位体积焓	N/m^2	ρ_p 颗粒密度	kg/m^3
f_p 修正因子		ρ_{mp} 颗粒物质密度	kg/m^3
g_p 修正因子		ρ_T 推进剂密度	kg/m^3
H_p 颗粒单位质量焓	J/kg	μ 粘性系数	$kg/m \cdot s$
k 比热比		ϵ 凝相质量分数	$\Sigma = M_p/M_m$
n 压力指数		下标	
p 压力	MPa	p 凝相颗粒	
Pr 普朗特数		M 两相混合物	
R 气体常数	$J/kg \cdot K$	r 参考量	
r_p 凝相颗粒半径	m		

为了提高发动机的比冲和抑制不稳定燃烧, 往往在推进剂中加入某些金属添加物如铝粉, 这就使得喷管内的流动是两相流动。对于喷管两相流动的研究已进行了大量工作^[1,2], 但主要集中在定常两相流动方面。本文着重研究压力建立过程中的非定常两相流动。

一、控制方程

1. 基本假设

- (1) 流动是一维非定常的；
- (2) 颗粒尺寸均一，忽略颗粒占的容积和颗粒对压力的贡献；
- (3) 气体遵循完全气体状态方程，除了和颗粒接触处外没有粘性；
- (4) 仅考虑两相之间的对流传热；
- (5) 仅考虑颗粒所受的阻力。

2. 控制方程

非定常两相流动的控制方程包括气相的质量、动量、能量守恒方程和凝相的质量、动量、能量守恒方程。这六个方程可统一写成：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + H = 0 \quad (1)$$

其中

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ e \\ \rho_p \\ \rho_p v_p \\ \rho_p v_p^2 \\ e_p \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \rho v \\ p + \rho v^2 \\ (e + p)v \\ \rho_p v_p \\ \rho_p v_p^2 \\ e_p v_p \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} \rho v \frac{dA}{Adx} \\ \rho v^2 \frac{dA}{Adx} + A_p \rho_p (v - v_p) \\ (e + p)v \frac{dA}{Adx} + B_p \rho_p (T - T_p) + A_p \rho_p v_p (v - v_p) \\ \rho_p v_p \frac{dA}{Adx} \\ \rho_p v_p^2 \frac{dA}{Adx} - A_p \rho_p (v - v_p) \\ e_p v_p \frac{dA}{Adx} - B_p \rho_p (T - T_p) \end{pmatrix}$$

$$p = (k-1) \left(e - \frac{1}{2} \rho v^2 \right)$$

$$A_p = 9\mu f_p / (2\rho_{mp} r_p^2)$$

$$B_p = 3\mu C_p g_p / (\rho_{mp} r_p^2 Pr)$$

方程(1)为双曲型方程，可采用有限差分方法求解。

3. 方程无因次化

为了提高计算精度,把方程(1)无因次化。所用参考量如下:

参考压力 p_r , 初始时刻燃烧室内压力 参考长度 L_r , 喉道半径 v_r ,
参考温度 T_r , 初始时刻燃烧室内燃气温度 参考速度 v_r , $v_r = \sqrt{p_r/\rho_r}$,
参考密度 ρ_r , 初始时刻燃烧室内燃气密度 参考时间 t_r , $t_r = L_r/v_r$,

相应的无因次量为

$$\begin{aligned}\bar{p} &= p/p_r, & \bar{e} &= e/p_r, & \bar{T} &= T/T_r \\ \bar{\rho} &= \rho/\rho_r, & \bar{e}_p &= e_p/p_r, & \bar{X} &= x/L_r \\ \bar{v} &= v/v_r, & \bar{t} &= t/t_r, & \bar{V}_p &= \bar{V}_p/V_r \\ \bar{T}_p &= T_p/T_r, & \bar{A} &= A_2/L_r^2, & \bar{V}_p &= \bar{V}_p/V_r\end{aligned}$$

将上面的无因次量代入方程(1);得到的方程形式上与(1)相同,只是下面两个量不同:

$$\begin{aligned}\bar{A}_p &= A_p \cdot L_r / \sqrt{RT_r} \\ \bar{B}_p &= B_p \cdot L_r / (R \cdot \sqrt{RT_r})\end{aligned}$$

为了书写方便,除特殊说明外,下面的公式中省略无因次量上面的“-”号。

4. 坐标变换和计算坐标下的控制方程

由于喉部附近参数变化剧烈,在计算中希望喉部节点取得密一点,但差分计算要求等间距节点。坐标变换可以圆满解决这一问题。

引入下面的变换函数:

$$\xi = \xi_N [sh^{-1}B(x - x_t) + sh^{-1}(Bx_t)] / [sh^{-1}B(x_N - x_t) + sh^{-1}(Bx_t)]$$

其中 x_t 喷管喉部的轴向坐标;

ξ_N imax-1

x_N 喷管出口处的轴向坐标;

B 拉伸因子,控制网格稀疏程度。

imax 总节点数

$$\text{由于 } \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{dx}$$

$$\text{所以 } \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \left(F \frac{d\xi}{dx} \right)}{\partial x} + H - F \frac{d^2 \xi}{dx^2} \cdot \frac{d\xi}{dx} = 0$$

$$\text{式中 } \frac{d\xi}{dx} = \xi_N B / \{ \sqrt{B^2(x - x_t)^2 + 1} [sh^{-1}B(x_N - x_t) + sh^{-1}(Bx_t)] \}$$

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} = \frac{d\xi}{dx} \cdot \alpha$$

$$\alpha = -B^2(x - x_t) / [B^2(x - x_t)^2 + 1]$$

无因次方程经坐标变换后得到下面的方程:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} + \tilde{H} = 0 \quad (2)$$

$$\text{其中 } \tilde{U} = U, \quad \tilde{F} = F \frac{d\xi}{dx}, \quad \tilde{H} = H - F\alpha$$

5. 差分格式

数值求解方程(2), 采用下面的MacCormack预校二步差分格式:

$$\tilde{U}_i^{n+1} = \tilde{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \left(\tilde{F}_{i+1}^n - \tilde{F}_i^n \right) - \Delta t \tilde{H}_i^n + S_i^n$$

$$\tilde{U}_i^{n+1} = \tilde{U}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \left(\tilde{F}_{i+1}^{n+1} - \tilde{F}_{i-1}^{n+1} \right) - \Delta t \tilde{H}_i^{n+1} + S_i^{n+1}$$

$$\tilde{U}_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left(\tilde{U}_i^n + \tilde{U}_i^{n+1} \right)$$

式中 S_i^n 和 S_i^{n+1} 是人工粘性项

$$S_i^n = b_k \left| \frac{\rho_{j+1} - 2\rho_j + \rho_{j-1}}{\rho_{j+1} + 2\rho_j + \rho_{j-1}} \right| (\tilde{U}_{j+1} - 2\tilde{U}_j + \tilde{U}_{j-1})$$

6. 初场和边界条件

为研究方便起见, 假设喷管内初始流动状态为两相平衡流。由于两相平衡流是等熵流, 由等熵关系式即可求得初始流场。

(1) 左边界条件

本计算研究的是端面燃烧发动机, 在喷管入口前有一零维区域 (体积为 V_0), 推进剂燃烧产物会不断地加入到此区域中来。于是, 在 V_0 区域内满足下面的质量和能量守恒方程 (其中 V_0 , ρ_T , A_b , T_c , R 为有因次量):

质量守恒方程:

$$\frac{\rho_r}{t_r} \cdot \frac{d(\rho V_0)}{dt} + \rho_r V_r L_r^2 \cdot \rho V A_1 = (1 - \varepsilon) \rho_T b p^n A_b p^n \quad (3)$$

(2) 能量守恒方程

$$\begin{aligned} \frac{p_r}{t_r} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{V_0} \left[k_M R T_c \rho_T b p^n A_b (1 - \varepsilon) - k_m p p_r A_1 L_r^2 v v_r \right. \\ \left. - \frac{k_M - 1}{2} \cdot \frac{p A_1 p_r v^3 v_r^3 L_r^2}{R_M T T_r} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

假设入口处两相平衡, 则有:

$$T_p = T \quad (5)$$

$$\rho_p = \frac{M_p}{V_M} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \rho \quad (6)$$

$$v_p = v \quad (7)$$

(3) 左型特征线相容方程

$$dp_I - \rho c dv_I = -\rho v c^2 \frac{dA}{A dx} dt_I \quad (8)$$

上面六个方程(3)~(8)经过适当变换后, 得到方面一组方程:

$$\frac{d\rho}{dt} = (\alpha_2 p^n - \alpha_3 \rho v) / V_0$$

$$\frac{dp}{dt} = \left(\alpha_2 k_M p^n \cdot \frac{T_c}{T_r} - \alpha_3 k_M p v - \frac{(k_M - 1)}{2} \cdot \frac{\alpha_3 \rho v^3}{1 - \varepsilon} \right) / V_0$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\rho c V_0} \left(\alpha_2 k_M p^n \cdot \frac{T_c}{T_r} - \alpha_3 k_M p v - \frac{(k_M - 1)}{2} \cdot \frac{\alpha_3 \rho v^3}{1 - \varepsilon} \right) + cv \frac{dA}{Adx} + \left(\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \frac{d\xi}{dt}$$

$$\rho_p = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \rho$$

$$V_p = V$$

$$T_p = T$$

其中 $\alpha_2 = (1 - \varepsilon) \rho_T A_b \sqrt{RT_r} L, b/p_r^{1-n}$ $\alpha_3 = A_1 L^3$

(4) 右边界条件

右边界处在超音速流中, 边界点的误差不影响内部点, 所以出口边界的计算采用三点外差公式:

$$\tilde{U}_{j,N+1}^{n+1} = \tilde{U}_{j,N-2}^{n+1} + 3(\tilde{U}_{j,N}^{n+1} - \tilde{U}_{j,N-1}^{n+1})$$

二、算例和结论

本文计算的发动机喷管如图 1 所示。计算初始数据为: $p_r = 2 \text{ MPa}$, $A_b = 0.058 \text{ m}^2$, $T_r = 2500 \text{ K}$, $b = 1.625 \times 10^{-3} \text{ m/s}$, $c_p = 1977 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, $c_s = 1437 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, $n = 0.41$, $R = 413.5 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, $k = 1.264$, $r_p = 2 \times 10^{-6} \text{ m}$, $\rho = 1740 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{mp} = 3960 \text{ kg/m}^3$, $\varepsilon = 0.26$ 。

图 2 示出了燃烧室压力随时间的变化规律, 由图可见, 压力上升速率逐渐减慢, 最终将达到定常流动状态。

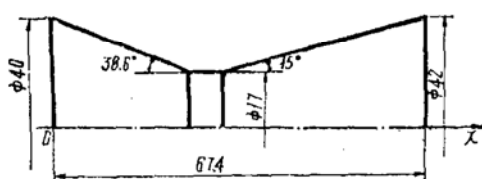


图1 计算喷管形状和尺寸图

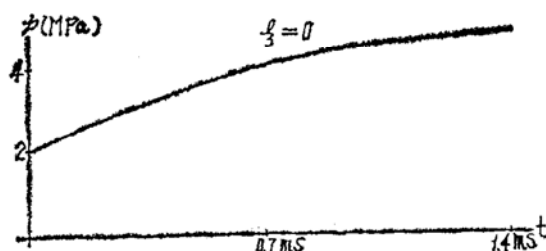


图2 燃烧室压力时间曲线

图 3 和图 4 分别比较了颗粒和气体的温度、速度。由图 3 可见, 颗粒温度大于气体温度, 越靠近喷管出口二者温度差越大, 最大温度差为 600 K。由图 4 可见, 气体速度大于颗粒速度, 在喷管扩张段二者速度差较大。

图 5 比较了颗粒和气体密度沿轴向的分布。由图可见, 气体密度大于颗粒密度, 在喷管入口处密度差最大。颗粒密度沿轴向的分布呈拱形。

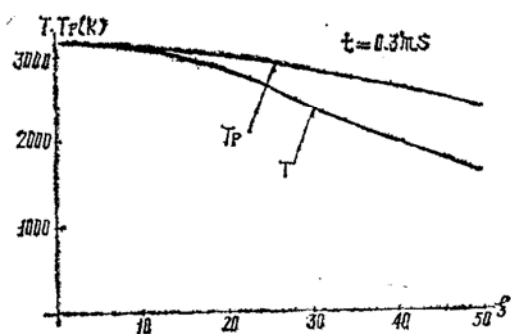


图3 T 和 T_p 沿轴向的分布

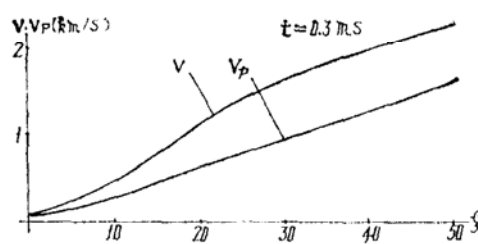


图4 v 和 v_p 沿轴向的分布

图6给出了 $t = 0.3\text{ms}$ 压力沿轴向的分布,是逐渐降低。图7至图9给出了不同时刻颗粒速度、密度、温度沿轴向的分布,可看出,这些参数都随时间推移增加,其增加的速率逐渐减慢。图10至图13示出了不同时刻气体速度、密度、温度和压力沿轴向的分布。由图可见,气体参数与颗粒参数的变化规律相同。

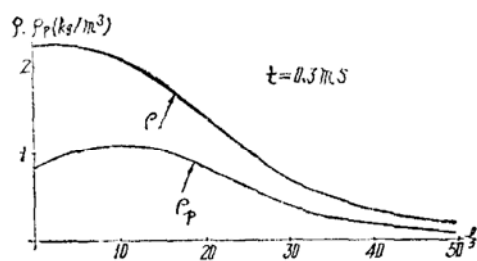


图5 ρ 和 ρ_p 沿轴向的分布

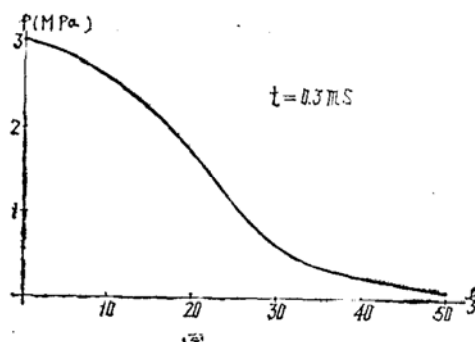


图6 压力沿轴向分布

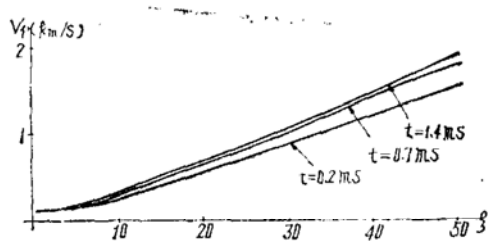


图7 不同时刻 v_p 沿轴向的分布

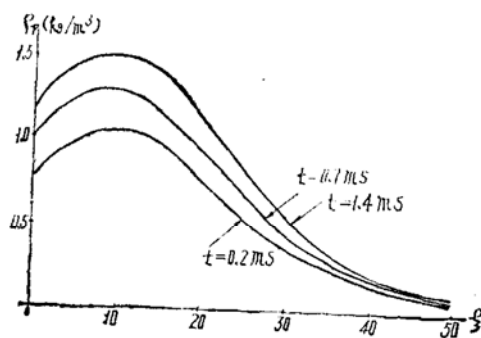


图8 不同时刻 ρ_p 沿轴向的分布

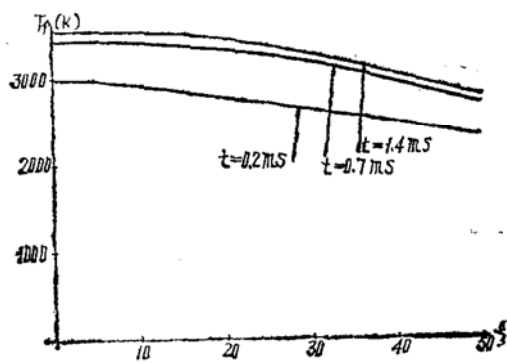


图9 不同时刻 T_p 沿轴向的分布

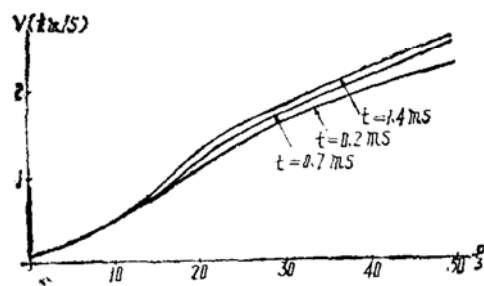


图10 不同时刻 v 沿轴向的分布

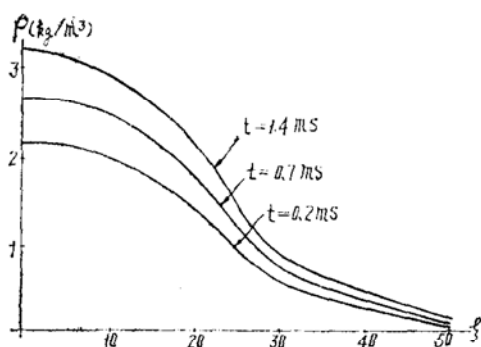


图11 不同时刻 ρ 沿轴向的分布

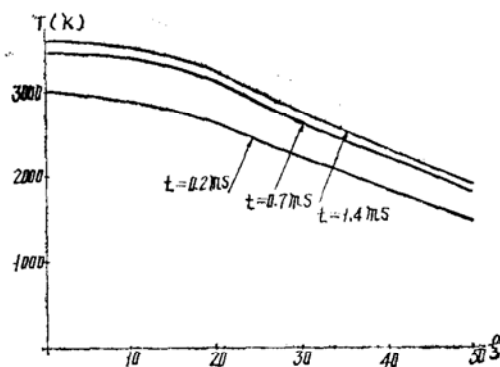


图12 不同时刻 T 沿轴向的分布

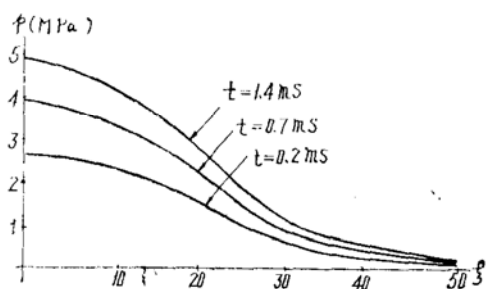


图13 不同时刻压力沿轴向的分布

三、结 论

根据前面的分析可得到以下几点结论:

1. 颗粒温度高于气体温度;
2. 气体速度大于颗粒速度;
3. 气体密度大于颗粒密度;
4. 随着时间的推移, 气体速度、温度、密度、压力和凝相颗粒的速度、密度、温度都有不同程度的增加, 其增加速率逐渐减慢。

参 考 文 献

- (1) 方丁酉: 一维两相喷管流动。宇航学报, 1982年第3期。
- (2) 王慧玉、张远君: 全耦合的一维两相喷管流的数值解。中国航空学会动力专业年会, 830063, 1983年。

(上接第74页)

参 考 文 献

- (1) 桑秉诚等: 激光步进电机型固体推进剂药条燃面同步跟踪装置。1983年8月, 哈尔滨船舶工程学院。
- (2) 哈尔滨船舶工程学院激光测速课题组: 激光步进电机型固体推进剂药条燃面同步跟踪装置。推进技术, 1985年第3期。
- (3) Goetz, F. and Mann, D. M.: Design and use of a servo-controlled high pressure window bomb in spectroscopic studies of solid propellant combustion, AD-A094820.
- (4) Renine, J. P. and Osborn, J. R.: Aluminium particle combustion in composite solid propellants, AIAA-82-1110.
- (5) Caveny, L. H.: Direct measurements of acoustic admittance using Laser Doppler velocimetry, AIAA-81-4177.
- (6) Morita, A. and Nagaoka, T.: Effect of pressure oscillation on the burning rate of solid propellant, AIAA-81-1521.