

固体推进剂线粘弹性有限元分析

尚世英

摘 要

本文利用有限元法对固体火箭发动机药柱进行了线粘弹性分析,同时考虑了发动机外壳的影响。在推导公式中,还考虑到发动机内压和轴向过载对温度变化的影响。最后通过几个典型问题的计算,得到较满意的结果。

主题词: 应力计算,推进剂药柱,粘弹性,有限元法,线性分析

用有限元法分析热粘弹性材料可分两种情况:(1)使用微分构成关系^[1]。这种方法和金属蠕变分析方法相类似。(2)使用积分构成关系。最早比较系统地提出这种方法的是 White, J.L.^[2]。后来Sankaran, G.V.和Jana, M.K.^[3],以及Srinatha, H.R.和Lewis, R.W.^[4], 又对White法进行了推广。

微分构成关系是以简单的力学模型(弹簧和阻尼器)为基础建立起来的,而积分构成关系是由连续体力学的基本原理推导出来的。因为它们是对同一事物的不同方法描述,当然它们之间有一定的等效关系。微分构成关系多用于对应原理的拉氏变换方法。这里我们采用了积分构成关系,它所用到的剪切模量 $G(t)$,可以很方便地通过粘弹谱仪得到的主曲线,用Prony级数的形式给出。由于使用了Prony级数,则可较方便地推导出递推公式,这就解决了计算机内存不足的矛盾。如果不用递推公式,则在计算中就必须把先前的所有历史都记录下来。这不但增加了计算量,而且也是计算机内存不允许的。

本文推导出计算公式,并编制了计算机程序,同时也研究了不同的算法。

一、基本理论和构成关系

假设:(1)材料是各向同性、均匀和线性的;(2)应力-应变关系是遗传积分形式的;(3)材料是热流变简单的。这意味着温度-时间等效假设成立。另外,为了简化问题,假设体积模量 K 为常值。

对于线粘弹性材料,在单轴情况下构成关系为

$$\sigma(x, t) = \int_0^t E_{rel}(t-t') \frac{\partial \varepsilon(x, t')}{\partial t'} dt' \quad (1)$$

$$\varepsilon(x, t) = \int_0^t D_{crep}(t-t') \frac{\partial \sigma(x, t')}{\partial t'} dt' \quad (2)$$

式中 E_{rel} 和 D_{crep} 分别称为松弛模量和蠕变柔度。在三维问题中有

$$S_{ij}(\vec{x}, t) = 2 \int_0^t G_{r,ij}(t-t') \frac{\partial e_{ij}(\vec{x}, t')}{\partial t'} dt' \quad (3)$$

$$\sigma_m(\vec{x}, t) = 3K \varepsilon_m(\vec{x}, t) \quad (4)$$

式中 $G_{r,ij}$ 和 K 分别称为剪切松弛模量和弹性体积模量。

如果考虑温度影响, 根据热流变简单材料的性质, 则有

$$S_{ij}(\vec{x}, t) = 2 \int_0^t G_{r,ij}(\xi - \xi') \frac{\partial e_{ij}(\vec{x}, t')}{\partial t'} dt' \quad (5)$$

$$\sigma_m(\vec{x}, t) = 3K(\varepsilon_m(\vec{x}, t) - \alpha \Delta T) \quad (6)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi(\vec{x}, t) = \int_0^t \frac{d\tau}{a_T(T(\vec{x}, \tau))} \\ \xi' &= \xi'(\vec{x}, t') = \int_0^{t'} \frac{d\tau}{a_T(T(\vec{x}, \tau))} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

称为等效时间。 $a_T(T(\vec{x}, t))$ 称为移位函数, 它是温度 T 的函数。一般由实验确定, 常用的表达式为

$$\log a_T(T) = \frac{-C_1(T-T_0)}{C_2 - (T-T_0)} \quad (8)$$

式中 C_1 和 C_2 为材料常数。 T 和 T_0 分别为当前温度和材料参考温度, 即主曲线的参考温度。

在初始状态的偏应变 $e_{ij}(0) = 0$ 时, 则 (5) 式可变为

$$S_{ij}(\vec{x}, t) = 2 \left[G(o) e_{ij}(\vec{x}, t) - \int_0^t \frac{\partial G(\xi - \xi')}{\partial t'} e_{ij}(\vec{x}, t') dt' \right] \quad (9)$$

注意, G 的下标已省略。这时全应力可表示为

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\vec{x}, t) &= S_{ij}(\vec{x}, t) + \delta_{ij} \sigma_m(\vec{x}, t) \\ &= 2G(o) e_{ij}(\vec{x}, t) - 2 \int_0^t \frac{\partial G(\xi - \xi')}{\partial t'} e_{ij}(\vec{x}, t') dt' \\ &\quad + \delta_{ij} 3K \left\{ \varepsilon_m(\vec{x}, t) - \alpha [T(\vec{x}, t) - T(\vec{x}, o)] \right\} \\ &= 2G(o) e_{ij}(\vec{x}, t) - 2 \int_0^t \frac{\partial G(\xi - \xi')}{\partial t'} e_{ij}(\vec{x}, t') dt' \\ &\quad + \delta_{ij} \frac{2}{3} \int_0^t \frac{\partial G(\xi - \xi')}{\partial t'} \varepsilon_{KK}(\vec{x}, t') dt' \\ &\quad + \delta_{ij} \left[K - \frac{2}{3} G(o) \right] \varepsilon_{KK}(\vec{x}, t) \\ &\quad - \delta_{ij} 3K \alpha [T(\vec{x}, t) - T(\vec{x}, o)] \end{aligned} \quad (10)$$

式中 $T(\vec{x}, t)$ 和 $T(\vec{x}, o)$ 为结构当前温度和结构参考温度。为方便起见, 可把 (10) 式写成矩阵的形式, 即

$$\{\sigma\} = [D_0]\{\varepsilon\} + [L]\{\varepsilon\} - 3K\alpha\{I\}\Delta T \quad (11)$$

式中

$$[D_0] = \begin{pmatrix} K + \frac{4}{3}G(o) & K - \frac{2}{3}G(o) & K - \frac{2}{3}G(o) & 0 & 0 & 0 \\ & K + \frac{4}{3}G(o) & K - \frac{2}{3}G(o) & 0 & 0 & 0 \\ & & K + \frac{4}{3}G(o) & 0 & 0 & 0 \\ & & & G(o) & 0 & 0 \\ & \text{对称} & & & G(o) & 0 \\ & & & & & G(o) \end{pmatrix}$$

$$[L]\{\varepsilon\} = \int_0^t \frac{\partial G(\xi - \xi')}{\partial t'} [D_1]\{\varepsilon\} dt'$$

$$[D_1] = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & & -\frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & -1 & 0 & 0 \\ \text{对称} & & & & -1 & 0 \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\{I\} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\Delta T = \Delta T(\vec{x}, t) = T(\vec{x}, t) - T(\vec{x}, 0)$$

$$\{\sigma\} = [\sigma_x(\vec{x}, t) \sigma_y(\vec{x}, t) \sigma_z(\vec{x}, t) \tau_{xy}(\vec{x}, t) \tau_{yz}(\vec{x}, t) \tau_{zx}(\vec{x}, t)]^T$$

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x(\vec{x}, t) \varepsilon_y(\vec{x}, t) \varepsilon_z(\vec{x}, t) \gamma_{xy}(\vec{x}, t) \gamma_{yz}(\vec{x}, t) \gamma_{zx}(\vec{x}, t)]^T$$

应当指出，积分算子 $[L]\{\varepsilon\}$ 中 $\{\varepsilon\}$ 的时间变量应为 t' 。

二、有限元公式

根据虚功原理，对于整个结构有限元公式

为

$$\int_{\Omega} [B]^T \{\sigma(t_k)\} dv = \{F_m(t_k)\} \quad (12)$$

式中 Ω 为整个结构的体积。对于一个单元，则为

$$\int_{v_e} [B]^T \{\sigma(t_k)\} dv = \{F_m^e(t_k)\} \quad (13)$$

式中 v_e 为一个单元的体积。为书写简单，式中的坐标矢量 $\vec{x}$ 被省略。应当指出，这里并没有考虑变形对几何特性的影响。在(13)式中，

$$\{F_m^e(t_k)\} = \int_{v_e} [N]^T \{g(t_k)\} dv + \int_{s_e} [N]^T \{p(t_k)\} ds$$

为由体积力 $\{g(t_k)\}$ 和表面力 $\{p(t_k)\}$ 引起的一致节点载荷。

把 (11) 式代入 (13) 式, 则为

$$\int_{V_e} \{B\}^T \left\{ [D_0] \{e(t_k)\} + [D_1] \int_0^{t_k} \frac{\partial G(\xi - \xi')}{\partial t'} \{e(t')\} dt' - 3k\alpha \{I\} \Delta T \right\} dv = \{F_m^e(t_k)\} \quad (14)$$

按梯形积分法则, 可把积分 $\int_0^{t_k} \frac{\partial G(\xi - \xi')}{\partial t'} \{e(t')\} dt'$

写成和式的形式, 即

$$\int_0^{t_k} \frac{\partial G(\xi - \xi')}{\partial t'} \{e(t')\} dt' = \sum_{i=1}^{k-1} [G(\xi_k - \xi_{i+1}) - G(\xi_k - \xi_i)] \times \frac{1}{2} [\{e(t_{i+1})\} + \{e(t_i)\}]$$

把上式代入 (14) 式, 化简后则为

$$\{[K_0] + [K_1][G(0) - G(\xi_k - \xi_{k-1})]\} \{\delta_e(t_k)\} = \{F_m^e(t_k)\} + \{F_T^e(t_k)\} + \{F_{m1}^e(t_k)\} \quad (15)$$

$$\text{式中 } [K_0] = \int_{V_e} \{B\}^T [D_0] \{B\} dv \quad (16)$$

$$[K_1] = -\frac{1}{2} \int_{V_e} \{B\}^T [D_1] \{B\} dv \quad (17)$$

$$\{F_T^e(t_k)\} = 3K \int_{V_e} \{B\}^T \alpha \{I\} \Delta T(t_k) dv \quad (18)$$

称为单元节点热载荷,

$$\begin{aligned} \{F_{m1}^e(t_k)\} = & - \int_{V_e} \{B\}^T [D_1] \left\{ \sum_{i=1}^{K-2} [G(\xi_K - \xi_{i+1}) - G(\xi_K - \xi_i)] \right. \\ & \times \frac{1}{2} [\{e(t_{i+1})\} + \{e(t_i)\}] + \frac{1}{2} [G(0) - G(\xi_K - \xi_{K-1})] \\ & \left. \times \{e(t_{K-1})\} \right\} dv \end{aligned} \quad (19)$$

称为记忆载荷。记忆载荷是由材料的记忆特性引起的。从 (19) 式可以看出, 要计算 $\{F_{m1}(t_k)\}$ 必须考虑先前的全部历史。这样计算机的内存是不够用的。为了解决这一矛盾, 可以把剪切松弛模量 $G(t)$ 用 Prony 级数表示, 并导出递推公式, 于是就只需要存贮前两步的位移 (或应变)。

把剪切松弛模量 $G(t)$ 用 Prony 级数表示为

$$G(t) = G_0 + \sum_{j=1}^M G_j e^{-\frac{t}{\tau_j}} \quad (20)$$

$$\text{令 } \{W_{j,k}\} = \sum_{i=1}^{K-2} \left(e^{-\frac{\xi_K - \xi_{i+1}}{\tau_j}} - e^{-\frac{\xi_K - \xi_i}{\tau_j}} \right) \frac{1}{2} (\{e(t_{i+1})\} + \{e(t_i)\})$$

递推公式则为

$$\{W_{j,k}\} = e^{-\frac{\xi_K - \xi_{K-1}}{\tau_j}} \left[\left(1 - e^{-\frac{\xi_{K-1} - \xi_{K-2}}{\tau_j}}\right) \frac{1}{2} (\{\varepsilon(t_{K-1})\} + \{\varepsilon(t_{K-2})\}) + \{W_{j,K-1}\} \right] \quad (21)$$

并且

$$\begin{aligned} \{W_{j,1}\} &= \{W_{j,2}\} = \{0\} \\ \{W_{j,3}\} &= \left(e^{-\frac{\xi_3 - \xi_2}{\tau_j}} - e^{-\frac{\xi_3 - \xi_1}{\tau_j}} \right) \frac{1}{2} (\{\varepsilon(t_2)\} + \{\varepsilon(t_1)\}) \end{aligned}$$

这时, (19) 式变为

$$\{F_{m1}^e(t_K)\} = - \int_{V_e} \{B\}^T \{D_1\} \left\{ \sum_{j=1}^M G_j \{W_{j,K}\} + \frac{1}{2} [G(0) - G(\xi_K - \xi_{K-1})] \times \{\varepsilon(t_{K-1})\} \right\} dV \quad (22)$$

从 (21) 和 (22) 式可以看出, 计算 $\{F_{m1}^e(t_K)\}$ 只需 $\{\varepsilon(t_{K-1})\}$, $\{\varepsilon(t_{K-2})\}$ 和 $\{W_{j,K-1}\}$ 就行了。这样就大大地节约计算机的内存。

由 (15) 式可以一步一步地解出位移。可以是变步长或等步长, 若在稳态温度场情况下, 等步长方法使得左端项保持为常值, 这给计算带来很大的好处。

由 (11) 式, 可推导出应力的计算公式为

$$\{\sigma(t_K)\} = \left\{ [D_v] + \frac{1}{2} [D_1] \sum_{j=1}^M G_j \left(1 - e^{-\frac{\xi_K - \xi_{K-1}}{\tau_j}} \right) \right\} \{\varepsilon(t_K)\} + \{\sigma_{m1}(t_K)\} - 3K\alpha\{I\}\Delta T(t_K) \quad (23)$$

$$\text{式中 } \{\sigma_{m1}(t_K)\} = [D_1] \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M G_j \left(1 - e^{-\frac{\xi_K - \xi_{K-1}}{\tau_j}} \right) \{\varepsilon(t_{K-1})\} + \sum_{j=1}^M G_j \{W_{j,K}\} \right\} \quad (24)$$

利用 (24) 式, (22) 式可简化为

$$\{F_{m1}^e(t_K)\} = - \int_{V_e} \{B\}^T \{\sigma_{m1}(t_K)\} dV \quad (25)$$

三、数值例题

根据推导出的一般公式, 化简为二维问题的公式 (见附录), 编写了通用程序, 它可以计算平面应力、平面应变和轴对称问题。单元类型为 8 节点等参元, 求解方法为波前法。

1. 分析两面夹持的端部受拉平板。几何尺寸和网格划分如图 1 所示。采用平面应变公式。

右端拉应力为

$$\sigma_x(t) = 0.06836 H(t) \text{MPa}$$

材料特性为

$$G(t) = 0.6836 + 67.6716e^{-143.874t} \text{MPa}$$

(时间为 S)

$$K = 136.71 \text{MPa}$$

图 2 给出平板右端的位移与初始弹性位移之比随时间而变化的曲线。从图上可以看出, 计算结果与理论解非常符合。在 3.9 分钟时, 计算值才小于理论值 0.40%。三角形描绘的曲线是变步长的计算结果, 由于步长的逐渐加大, 精度也逐渐降低, 但可以看出收敛的趋势。

2. 分析具有弹性外壳承受内压的无穷长厚壁圆筒药柱。它模拟发动机点火时的状态。几何尺寸和网格划分如图 3 所示。采用轴对称公式。

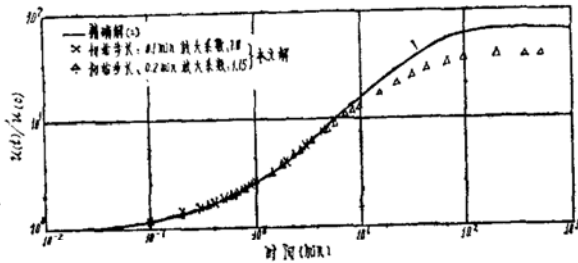


图 2

内压力为

$$p(t) = 0.098H(t) \text{MPa}$$

药柱材料特性为

$$G(t) = 0.6889 + 68.3158e^{-143.885t} \text{MPa (时间为 s)}$$

$$K = 137.2 \text{MPa}$$

外壳材料特性为

$$E_c = 2.058 \times 10^6 \text{MPa}, \nu_c = 0.3$$

图 4 给出内壁的径向位移随时间变化的曲线。图 5 给出药柱应力与压力比随时间变化的曲线。从图中看出计算结果与文献(3)中给出的结果非常一致。

3. 分析具有刚性外边界承受轴向惯性载荷的厚壁圆筒药柱。轴向过载系数取为 1, 模拟发动机竖直状态。几何尺寸及网格划分如图 6 所示。

材料特性为

$$G(t) = 0.6889 + 68.3158e^{-143.885t} \text{MPa (时间为 s)}$$

$$K = 137.2 \text{MPa}, \rho = 1.75 \times 10^3 \text{kg/m}^3$$

在 $t = 1.6 \text{min}$ 时, 药柱内缘的变形如图 7 所示, 内缘的径向位移如图 8 所示, 外缘的剪切应力如图 9 所示。

由计算知道, 变形远没有达到稳态的程度, 变形的规律是正确的。按文献(5)中给出的估算公式, 达到稳态时, 节点 23 的轴向位移与径向位移之比为 3.75, 这里在 $t = 1.6 \text{min}$ 时, 该比值为 3.39, 看来变形比例也比较符合。最大剪应力产生在药柱与壳体粘接面的上端, 越往下越小, 上端的最大值为 891.8Pa , 按文献(5)中给出的初估公式计算为 3861.2Pa 。但那里认

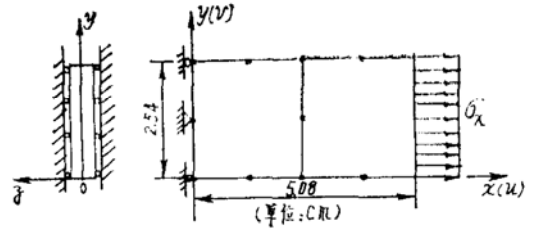


图 1

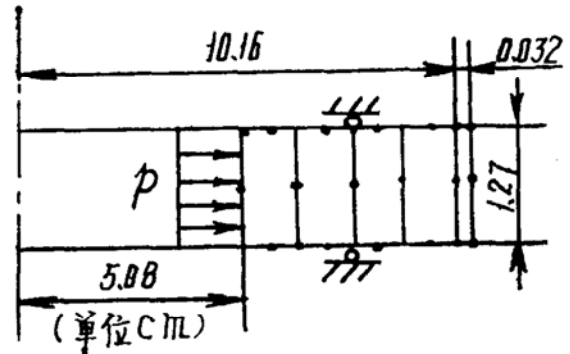


图 3

为药柱下端无支持，而我们这里下端有刚性支持，所以比较小。

4. 现对某一真实发动机进行分析。发动机的药柱为四星内孔贴壁浇铸药柱，承受突加

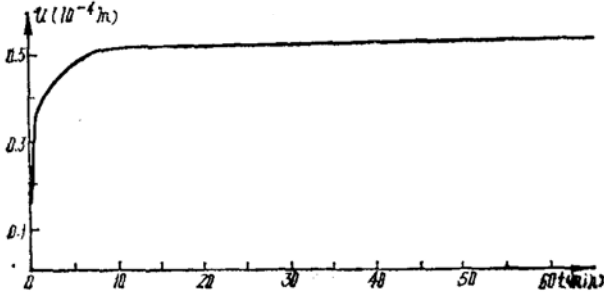


图 4

内压 $P(t) = 10.78H(t)\text{MPa}$ 。药柱中间的绝大部分可看做平面应变状态。考虑对称性，仅取1/4截面。几何尺寸与网格划分如图10所示。137个节点，36个8节点等参元。

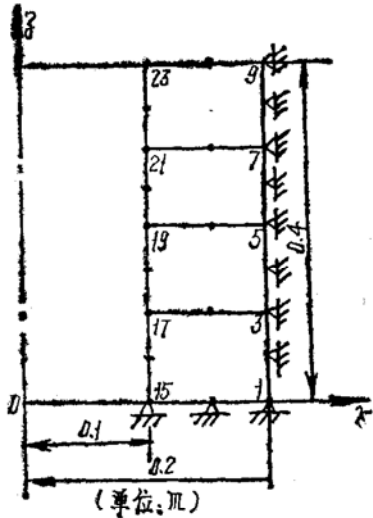


图 5

药柱的材料性能 $E(t)$ ，根据“DDV-Ⅲ-EA”动态

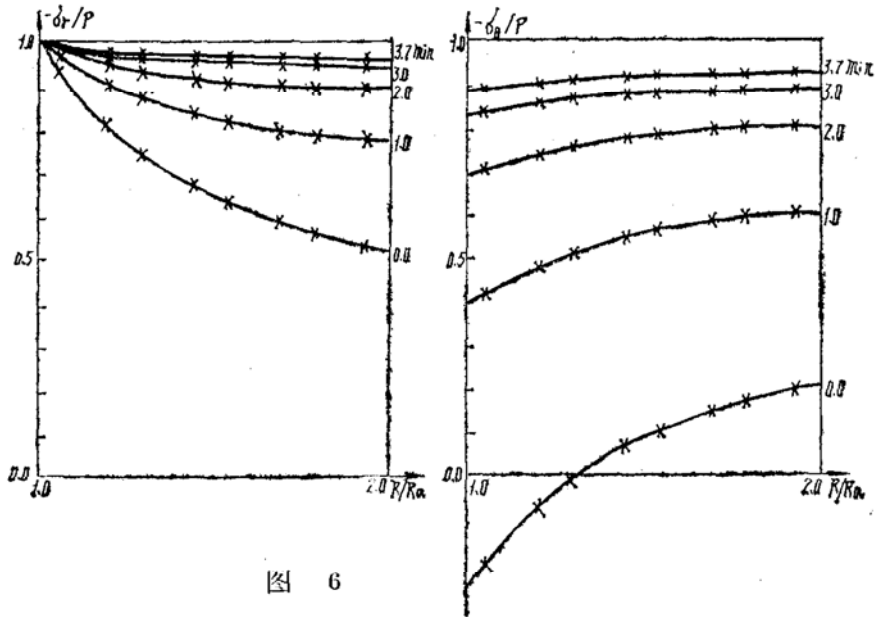


图 6

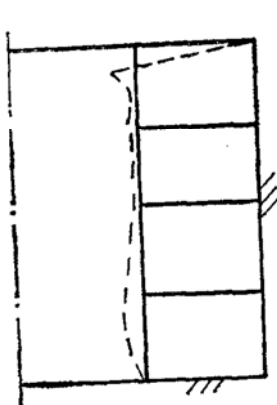


图 7

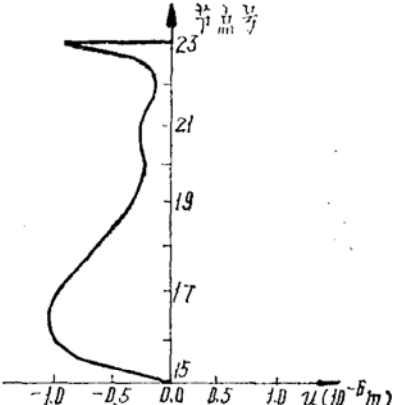


图 8

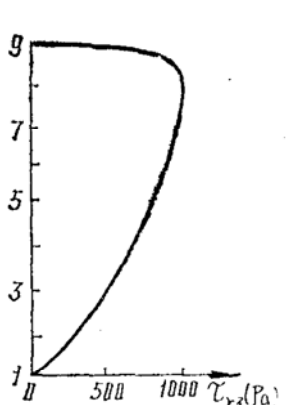


图 9

粘弹谱仪实测数, 用七项Prony级数给出。 $\nu = 0.495$, 剪切松弛模量 $G(t) \approx E(t)/3$, K 取常数。

第52节点的径向位移随时间的变化, 如图11所示。此处的环向应力随时间的变化, 如图12所示。由于外缘固支, 药柱材料又接近不可压, 所以环向应力为负值, 且随时间变化不大。

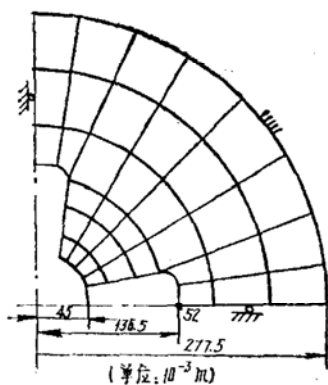


图 10

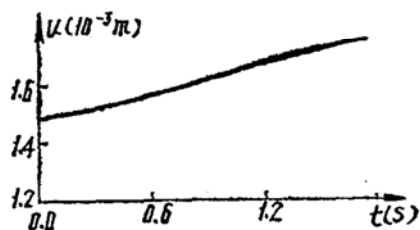


图 11

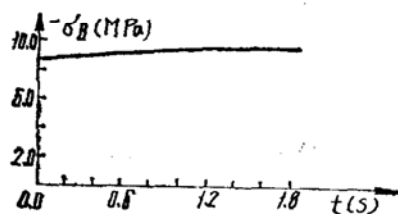


图 12

为了研究发动机壳体厚度对药柱变形和应力的影响, 现在按截面积相等的原则, 把星孔药柱化成厚壁圆筒药柱, 如图13所示。采用8节点的轴对称等参元, 药柱划分20个单元, 外壳划分1个单元。

分别对壁厚 $h = 2, 2.5, 3\text{mm}$ 和药柱外缘固支四种情况进行了计算。当 $t = 6\text{s}$ 时, 药柱内缘的径向位移, 径向应力和环向应力, 如图14, 15和16所示。

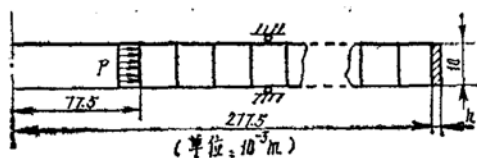


图 13

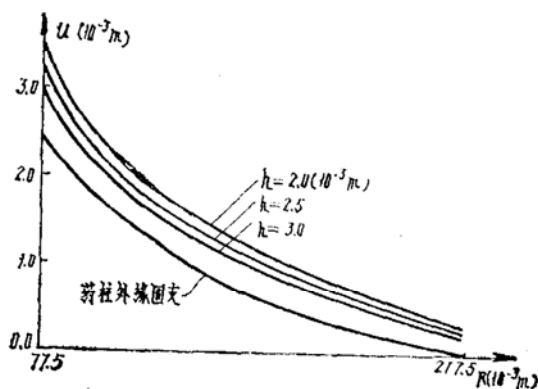


图 14

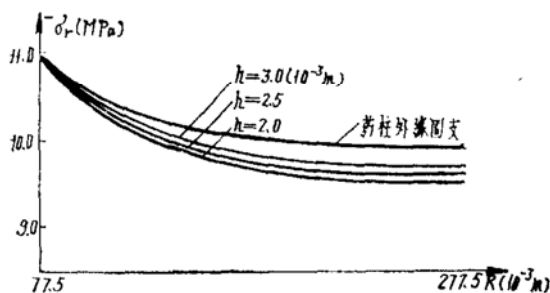


图 15

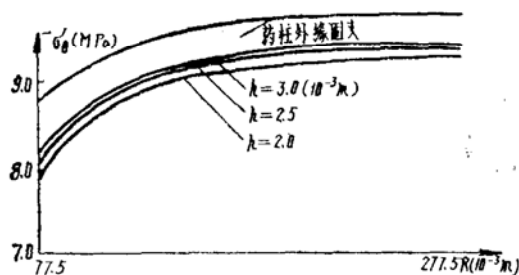


图 16

四、结 语

虽然药柱的粘弹性分析是比较复杂的,但在药柱的完整性分析中,它又是十分必要的。这里通过几个典型问题的分析,证明推导的公式及编制的程序是正确的,而且精度也比较高。从对一个实际发动机的分析,看出方法的适用性。虽然计算的问题均属于无穷长药柱,但它代表了药柱绝大部分(中段)变形和应力的特性。药柱端部的局部特性,可用三维有限元计算或用修正系数在二维基础上进行修正。由于三维有限元费用的昂贵,用二维模型进行求解就更显示出它的优越性。如果药柱纯属轴对称情况,则用二维程序就可以得到整个药柱的结果。

为简单起见,在几个数值分析中,并没有计及温度的影响,即认为 $a_T = 1$ 。也就是说把等效时间 $-\xi$ 看作物理时间 t 。推导的公式及编制的程序是考虑了 $a_T \neq 1$ 的一般情况。

发动机外壳的刚度对药柱的变形和应力有不可忽略的影响。按药柱外缘固支计算得到的径向位移偏小,而应力偏大(指绝对值),随着壳体的变薄,则径向位移增加,而应力减小。

为了使用的方便,程序编制了变步长和等步长两种算法。特别是当稳态温度场时,若采用等步长算法,则方程(15)的左端项不随时间而改变,即刚矩不变。这对计算非常有利,大约可以节省1/4机时。

附 录

为了编制二维程序,需要把三维的公式,简化为二维的公式。如果不考虑温度的影响,构成关系的矩阵形式为

$$\{\sigma\} = [D_0]\{\epsilon\} + [L]\{\epsilon\} \quad (a)$$

矩阵 $[D_0]$ 可以由(11)式进行简化,但这里为了考虑弹性外壳,用 E 和 ν 表示 $[D_0]$ 矩阵较为方便。 E 、 ν 和 K 、 $G(0)$ 的关系如下:

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{9KG(0)}{3K + G(0)} \\ \nu &= \frac{3K - 2G(0)}{2(3K + G(0))} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

对平面应力情况,

$$\left. \begin{aligned} \{\sigma\} &= [\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}]^T \\ \{\epsilon\} &= [\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_{xy}]^T \\ [D_0] &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{对称} & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \\ [D_1] &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ & -1 & 0 \\ \text{对称} & & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

对平面应变情况,

$$\begin{aligned}
\{\sigma\} &= [\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}]^T \\
\{\varepsilon\} &= [\varepsilon_x \varepsilon_y \nu_{xy}]^T \\
[D_0] &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{对称} & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{pmatrix} \\
[D_1] &= \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ & -\frac{4}{3} & 0 \\ \text{对称} & & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \quad (d)$$

对于轴对称情况,

$$\begin{aligned}
\{\sigma\} &= [\sigma_r \sigma_z \tau_{rz} \sigma_\theta]^T \\
\{\varepsilon\} &= [\varepsilon_r \varepsilon_z \sigma_{rz} \varepsilon_\theta]^T \\
[D_0] &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \text{对称} & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\
[D_1] &= \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ & & -1 & 0 \\ \text{对称} & & & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned} \quad (e)$$

参 考 文 献

- (1) Zienkiewicz, O.C., Watson, M. and King, I.P.: A numerical method of visco-elastic stress analysis, Int. J. Mech. Sci. 10, 807-827 (1968) .
- (2) White, J.L.: Finite elements in linear viscoelasticity, Proc. of the 2nd Conference on Matrix Method in Structural Mechanics, AFF DL-TR-68-150, Doc. 1968, pp489-516.
- (3) Sankaran, G.V. and Jana, M. K.: Thermoviscoelastic analysis of axisymmetric solid propellant grains, AIAA Paper No. 75-1343.
- (4) Srinatha, H.R., Lewis, R.W.: A finite element method for thermoviscoelastic analysis of plane problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 25(1981) 21-33.
- (5) 王元有等编著: 固体火箭发动机设计, 国防出版社, 1984.