

计量序贯抽检方案在固体火箭 发动机批生产验收中的应用

王 泰 俭

摘 要

计量序贯抽样方案与计数抽样及计量一次、二次抽样相比存在着明显的优点。对同样的检验要求,计量序贯抽样所需的平均抽样量最小。本文建议对服从正态分布的固体发动机性能参数采用计量序贯抽样方案进行批生产验收。文中给出了确定计量序贯方案的公式及实例。

符 号 表

- X ——发动机性能参数。
- $N(\theta, \sigma)$ ——总体均值为 θ 、总体标准差为 σ 的正态分布变量。
- $\hat{\sigma}$ ——由以往实测值得到的总体标准差 σ 的估计值。
- θ_0 ——以正态分布总体均值表示的合格质量水平,当性能参数 X 的总体均值 $\theta = \theta_0$,抽检方案应以大概率接收该批产品。
- θ_1 ——以正态分布总体均值表示的极限质量,当性能参数 X 的总体均值 $\theta = \theta_1$,抽检方案应以大概率拒收该批产品。
- p_0 ——以性能参数不合格品率表示的合格质量水平,当产品不合格率 $p = p_0$,抽检方案应以大概率接收该批产品。
- p_1 ——以性能参数不合格品率表示的极限质量,当产品不合格品率 $p = p_1$,抽检方案应以大概率拒收该批产品。
- α ——相应于 $\theta = \theta_0$ 或 $p = p_0$ 处的生产方风险,即将合格批误判为不合格批的概率。
- β ——相应于 $\theta = \theta_1$ 或 $p = p_1$ 处的使用方风险,即将不合格批误判为合格批的概率。
- $L(\theta)$ ——以性能参数总体均值 θ 为参数时抽检方案的接收概率。
- $L(p)$ ——以产品不合格品率 p 为参数时抽检方案的接收概率。
- n ——抽样方案的样本大小。
- ASN——采用二次抽检、多次抽检或序贯抽检方案时对交验批作出接收或拒收结论所需要的平均抽检样品量,是总体均值 θ 或产品不合格品率 p 的函数。
- u_p ——相应于规定的概率值 p 的正态分布上侧分位数,有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_p}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = p$$

一、问题的提出

众所周知,抽样检验是控制产品生产质量的一种重要手段,选择适当的抽检方案可以保证经抽检合格的产品达到一定的质量要求,起到质量把关作用。抽检方案分辨产品质量的能力与抽检的样本容量 n 有很大关系,即抽检方案的判断能力越强通常需要较大的样本容量。为了减少抽检成本,人们用二次、多次及序贯抽检方案代替一次抽检方案,以减少平均抽检量ASN。序贯抽检方案可使平均抽检量ASN降到最低。

固体火箭发动机的批生产验收面临着批量小、生产试验费用昂贵及质量要求高这样严峻的现实。战术导弹作为实战武器必须有很高的质量,抽检方案对质量差的产品批应具有很高的分辨能力,但高昂的生产试验费用又不允许作太多的试验。由于发动机的性能参数多数服从正态分布,因此计量序贯抽检方案可以在保证产品质量的前提下有效地减少平均抽检量。本文介绍正态性能参数的计量序贯抽检方案、给出了确定方案的公式推导和实例。

二、公式推导及方案的实施

1. 性能参数单边限 ($\theta_0 < \theta_1$) 情形

设性能参数 X 服从正态分布 $N(\theta, \sigma)$, 总体标准差 σ 已知。给定 $\theta_0, \theta_1 (\theta_0 < \theta_1), \alpha, \beta$, 要求制订计量序贯抽检方案, 使得:

当 $\theta \leq \theta_0$, 接收概率 $L(\theta) \geq 1 - \alpha$;

当 $\theta \geq \theta_1$, 接收概率 $L(\theta) \leq \beta$ 。

设 $X_1, X_2, \dots, X_m$ 为性能参数 X 的实测值, 则样本 $X_1, X_2, \dots, X_m$ 的似然函数为:

$$P_{0m} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} \sigma^m} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m (x_i - \theta_0)^2} \quad (\text{当 } \theta = \theta_0) \quad (1)$$

$$P_{1m} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} \sigma^m} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m (x_i - \theta_1)^2} \quad (\text{当 } \theta = \theta_1) \quad (2)$$

其序贯概率比为:

$$\begin{aligned} \frac{P_{1m}}{P_{0m}} &= \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m (x_i - \theta_1)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m (x_i - \theta_0)^2}} \\ &= e^{\frac{(\theta_1 - \theta_0)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m x_i - \frac{m}{2\sigma^2} (\theta_1^2 - \theta_0^2)} \end{aligned} \quad (3)$$

若概率比 P_{1m}/P_{0m} 远大于1, 说明 $\theta = \theta_1$ 的可能性大, 即该批产品处于极限质量的可能性大, 应判该批产品不合格; 若概率比 P_{1m}/P_{0m} 远小于1, 说明 $\theta = \theta_0$ 的可能性大, 即该批产品处于合格质量水平的可能性大, 应判该批产品合格; 若概率比既不太大也不太小, 则难于作出判断, 需继续抽检, 因此可将判断规则定为:

若 $P_{1m}/P_{0m} \geq A$, 判该批不合格;

若 $P_{1m}/P_{0m} \leq B$, 判该批合格;

若 $B < P_{1m}/P_{0m} < A$, 继续抽检下一个产品。

其中 A, B 为两个与 α, β 有关的待定常数, 有 $A > 1 > B$ 。Wald 建议近似采用

$$A \doteq \frac{1-\beta}{\alpha}, \quad B \doteq \frac{\beta}{1-\alpha}。在此近似下, 只要取:$$

$$a_m = \frac{\sigma^2}{\theta_1 - \theta_0} \ln \frac{\beta}{1-\alpha} + m \frac{\theta_0 + \theta_1}{2}, \quad (4)$$

$$r_m = \frac{\sigma^2}{\theta_1 - \theta_0} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + m \frac{\theta_0 + \theta_1}{2}。 \quad (5)$$

于是上述判断规则变为:

$$\text{当 } \sum_{i=1}^m X_i \leq a_m, \text{ 交验批接收;} \quad (6)$$

$$\text{当 } \sum_{i=1}^m X_i \geq r_m, \text{ 交验批拒收;} \quad (7)$$

$$\text{当 } a_m < \sum_{i=1}^m X_i < r_m, \text{ 继续抽检下一个产品。} \quad (8)$$

序贯抽检方案的实施通常有列表法和序贯抽检图两种方法, 列表法精度较高, 而采用序贯抽检图法则比较直观。

(1) 列表法

在抽检前先按式(4)、(5)计算 a_m 和 r_m 填入表 1。抽检后, 每抽检一台产品, 测得性能参数 X_i , 计算相应的 $\sum_{i=1}^m X_i$, 并填入表 1 中相应位置, 按式(6)、(7)、(8)判断该批产品合格、拒收或应再抽下一个产品。

例 1: 某固体发动机规定其最大压力 $P_{\max}$ 的上界 $U = 130$ 。由以往试车数据得 $P_{\max}$ 在高温 $T = 50^\circ\text{C}$ 下的标准差估值 $\hat{\sigma} = 3.06$, 要求制订 $p_0 = 12\%$, $p_1 = 20\%$, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.01$ 的计量序贯抽检方案并实施之。

解: 由于 $p_0 = 12\%$, $p_1 = 20\%$, 故有:

$$\theta_0 = U - u_{0.12}\sigma = 126.40$$

$$\theta_1 = U - u_{0.20}\sigma = 127.42$$

按式(4), 式(5)对不同 m 逐个计算 a_m 和 r_m , 得该发动机在 $T = 50^\circ\text{C}$ 下进行静态试车最大压力 $P_{\max}$ 验收的序贯抽检表 (表 1)

表中 X_m 为各次试车的 $P_{\max}$ 实测值。可以看出, 当抽检第四台发动机时公式(6)成立, 故判断该交验批合格。

(2) 序贯抽检图方法 (图解法)

为直观起见, 序贯抽检也常常用图来表示, 其作图顺序如下:

(i) 以样品序号 m 为横坐标, 性能参数的累积和 $\sum_{i=1}^m X_i$ 为纵坐标, 在此平面内作两平行直线:

表1 发动机最大压力 $P_{\max}$ 的序贯抽检表

m	a_m	X_m	$\sum_{i=1}^m X_i$	r_m
1	85.05	113.20	113.20	154.36
2	211.96	116.76	229.96	281.27
3	338.87	116.42	346.38	408.18
4	465.78	116.76	463.14	535.09
5	595.69	交验批合格		662.00
6	719.60			788.90
⋮	⋮			⋮

$$L_0: X = \frac{\sigma^2}{\theta_1 - \theta_0} \ln \frac{\beta}{1 - \alpha} + m \frac{\theta_0 + \theta_1}{2}$$

$$L_1: X = \frac{\sigma^2}{\theta_1 - \theta_0} \ln \frac{1 - \beta}{\alpha} + m \frac{\theta_0 + \theta_1}{2}$$

直线 L_0 , L_1 将平面分割成三部分：接收区、拒收区和继续抽检区（见图1）。

(ii) 进行序贯抽检。随着抽检的进行，逐次在图上描出 $(m, \sum_{i=1}^m X_i)$ 点。根据 $(m, \sum_{i=1}^m X_i)$ 所在的区域决定接收、拒收交验批或再抽检下一个产品。

图1，是例1的序贯抽检图。图1，与列表法得到的结论是相同的。

为方便计，以 S 、 h_0 、 h_1 分别表示 L_0 、 L_1 的斜率和截距：

$$S = \frac{\theta_0 + \theta_1}{2} \quad (9)$$

$$h_0 = \frac{\sigma^2}{\theta_1 - \theta_0} \ln \frac{\beta}{1 - \alpha} \quad (10)$$

$$h_1 = \frac{\sigma^2}{\theta_1 - \theta_0} \ln \frac{1 - \beta}{\alpha} \quad (11)$$

可推得上述计量序贯抽检方案的接收概率为：

$$L(\theta) = \frac{\left(\frac{1 - \beta}{\alpha}\right)^h - 1}{\left(\frac{1 - \beta}{\alpha}\right)^h - \left(\frac{\beta}{1 - \alpha}\right)^h} \quad (12)$$

其中：
$$h = \frac{\theta_1 + \theta_0 - 2\theta}{\theta_1 - \theta_0}$$

上述计量序贯抽检方案的平均抽检量为：

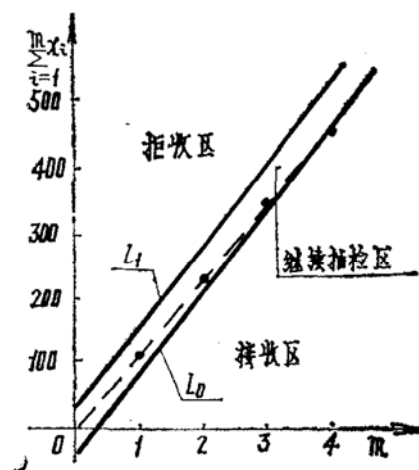


图1 发动机最大压力 $P_{\max}$ 的序贯抽检图

$$ASN(\theta) = \frac{h_1 + L(\theta)(h_0 - h_1)}{\theta - S} \quad (13)$$

当 $\theta = S$ 时,

$$ASN(S) = \frac{-h_0 h_1}{\sigma^2} \quad (14)$$

图 2 给出了由例 1 确定的计量序贯抽检方案的 OC 曲线, 可以看出当不合格品率 $p = p_0 = 0.12$ 时, 接收概率为 0.95, 当不合格品率 $p = p_1 = 0.20$ 时, 接收概率为 0.01。图 3 中的曲线 A 为例 1 确定的序贯方案的 ASN 曲线。由图 3 可见当 p 界于 p_0, p_1 之间时, 相应的 ASN 值较大, 这是由于例 1 要求抽检方案对产品质量的分辨能力特别高 (即 $\beta = 0.01$) 造成的。若将 β 改为 0.10, 其他参数不变, 则相应的序贯抽检方案的 ASN 曲线如图 3 中曲线 B 所示, 其相应的 ASN 值就小得多。

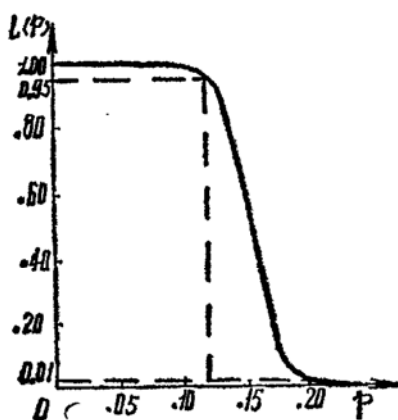


图 2 计量序贯抽检方案的 OC 曲线

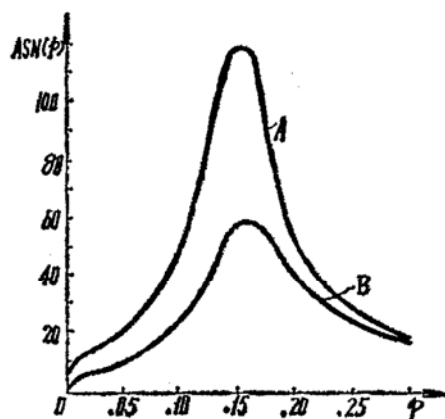


图 3 计量序贯抽检方案的 ASN 曲线

在一般情况下, 与等效的计量一次抽检方案相比, 计量序贯抽检方案作判断所需的样品量小得多。但当检验批的质量接近接收概率为 0.5 的 θ 值 (或 p 值) 时, 有可能要抽取很大的样本量才能作出判断, 这就大大削弱了序贯抽检的优点, 因此在实际工作中往往采用截尾的计量序贯抽样方案。即选取一个适当的截尾抽样数 m_t , 当抽样量 m 达到 m_t 仍未作出判断时,

就不再继续抽样, 而利用截尾合格判定数 A_t 求判断; 当 $\sum_{i=1}^{m_t} X_i \leq A_t$, 接收该批, 否则拒收。

其中 $A_t = m_t \cdot S$ 。截尾会改变序贯抽检方案的 OC 曲线和 ASN 曲线, 应慎重选择截尾数 m_t , 使抽样方案既能满足抽样特性的要求, 又有较好的经济性。

2. 性能参数单边限 ($\theta_0 > \theta_1$) 情形

设性能参数 X 服从正态分布 $N(\theta, \sigma)$, σ 已知, 给定 $\theta_0, \theta_1 (\theta_0 > \theta_1)$, α, β , 要求制订序贯抽检方案, 使得:

当 $\theta \geq \theta_0$, $L(\theta) \geq 1 - \alpha$

当 $\theta \leq \theta_1$, $L(\theta) \leq \beta$

与性能参数单边限 ($\theta_0 < \theta_1$) 情形相似, 计算 $a_m, r_m, L(\theta)$ 及 $ASN(\theta)$ 的公式与 ($\theta_0 < \theta_1$) 时完全相同, 可利用式 (4)、(5)、(12)、(13)、(14) 进行。但抽检方案的判据, 式 (6)、(7)、(8) 中的不等号均应改为相反方向。

3. 性能参数双边限（同时规定性能参数上、下限）情况

设性能参数 $X: N(\theta, \sigma)$, σ 已知。规定了性能参数 X 的上限 U 和下限 L 。给定 p_0 、 p_1 、 α 、 β ，要求建立计量序贯抽检方案，满足：

当批不合格品率 $p \leq p_0$ ，接收概率 $L(p) \geq 1 - \alpha$ ；

当批不合格品率 $p \geq p_1$ ，接收概率 $L(p) \leq \beta$ 。

由 p_0 、 p_1 及 σ 先分别对上限 U ，下限 L 确定其 θ_0 ， θ_1 ：

对上限 U ： $\theta'_0 = U - u_{p_0} \sigma$ (15)

$$\theta'_1 = U - u_{p_1} \sigma$$

对下限 L ： $\theta''_0 = L + u_{p_0} \sigma$ (16)

$$\theta''_1 = L + u_{p_1} \sigma$$

然后分别按单边限1，2所述方法：即根据 θ'_0 ， θ'_1 ， $\alpha/2$ ， β 建立 $\theta'_0 < \theta'_1$ 的计量序贯方案；根据 θ''_0 ， θ''_1 ， $\alpha/2$ ， β 建立 $\theta''_0 > \theta''_1$ 的计量序贯方案。实施序贯抽检时，必须两个抽检方案都通过才能判定交验批合格。

例2：某发动机总冲 I 服从正态分布，由以往试车数据估得 I 在 $T = -40^\circ\text{C}$ 下标准差 $\hat{\sigma} = 9.79$ 。 I 的上限 $U = 480$ ，下限 $L = 400$ ，试制订 $p_0 = 12\%$ ， $p_1 = 20\%$ ， $\alpha = 0.05$ ， $\beta = 0.01$ 的计量序贯抽检方案并实施之。

解：根据 L ， U ， $\hat{\sigma}$ 由式(15)、(16)可算得：

$$\theta'_0 = 468.49, \theta'_1 = 471.76, \theta''_0 = 411.51, \theta''_1 = 408.24$$

再根据 θ'_0 ， θ'_1 ， $\alpha/2 = 0.025$ ， $\beta = 0.01$ ， $\hat{\sigma} = 9.79$ 计算相应于上界 U 的计量序贯抽检表(表2)。根据 θ''_0 ， θ''_1 ， $\alpha/2 = 0.025$ ， $\beta = 0.01$ ， $\hat{\sigma} = 9.79$ 计算相应于下界 L 的计量序贯抽检表(表3)。

实施序贯抽检时，将温度 $T = -40^\circ\text{C}$ 时的发动机总冲 I 试验数据：428.87，435.42，428.01，……，逐个填入表2，表3，并作判断。从表2可见，相应于上界 U 的序贯抽检在抽检了第5台发动机后通过，但此时相应于下界 L 的序贯抽检未通过，当抽到第7台发动机，相应于 I 下限控制的序贯抽检也通过，此时该批发动机判定为合格。

图4是例2的序贯抽检图。

表2 发动机总冲相应于上界 U 的序贯抽检表

m	a_{mU}	X_m	$\sum_{i=1}^m X_i$	r_{mU}
1	335.59	428.87	428.87	578.19
2	805.72	435.42	864.29	1048.32
3	1275.85	428.01	1292.30	1518.44
4	1745.97	456.18	1748.48	1988.57
5	2216.10	424.60	2173.08	2458.70
6	2686.23	上界抽检合格		2928.82
7	3159.35			3398.94
⋮	⋮			⋮

表3 发动机总冲相应于下界L的序贯抽检表

m	a_{mL}	X_m	$\sum_{i=1}^m X_i$	r_{mL}
1	544.41	428.87	428.87	301.81
2	954.28	435.42	864.29	711.68
3	1364.15	428.01	1292.30	1121.56
4	1774.03	456.18	1748.48	1531.43
5	2183.90	424.60	2173.08	1941.30
6	2593.77	417.10	2590.18	2351.18
7	3003.65	439.00	3029.18	2761.05
8	3413.52	交验批合格		3170.93
9	3823.40			3580.80
⋮	⋮			⋮

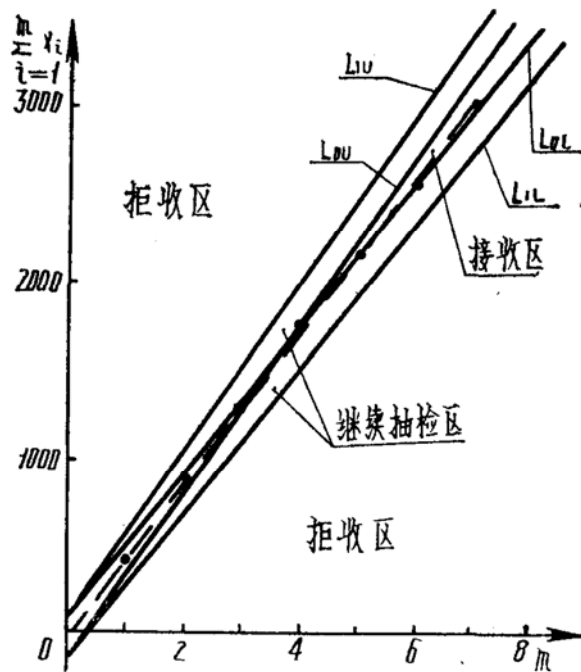


图4 总冲双边限制时的序贯抽检图