

喷流场的隐式空间步进解法

蒋辉国 王承尧

摘 要

为了寻求一个解决飞行器尾喷流场预估的有效方法, 本文将Mac Cormack (以后简称M.) 隐式法经改进后用于求解定常轴对称的且波系较复杂的粘性喷流场。N-S方程经抛物化处理后, 用空间步进的而不是时间步进的M. 隐式法求解。这样可大大节省机器内存提高计算效率, 使这种较为复杂的问题能在IBM-PC微机上计算。求解这类流场时, 隐步下边界条件需作特别处理, 为此, 作者对原方法的求解步骤作了一些改进。在本文工作开始之前, 未见有空间步进的M. 隐式法求解流场的文章发表。该法所得结果与M. 显示法的结果比较吻合。流场中紊流区网格若再分细, 结果会更佳。计算结果得到了笔者等所做实验的定性肯定。

符 号 表

C	音速	γ	比热比
C_p	等压比热	ρ	密度
H	$= \frac{\gamma \cdot p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2}$	μ	粘性系数
N	径向格点总数	μ_l, μ_t	分别表示层流、紊流粘性系数
n	轴向步进数	θ	气流方向角
p	压力	δ	δ 与变量F、G等并列用时表示相应变量的x向前差分
p_r	Prandtl数	*	作上标时表参考量 - (上扛)表示有因次量。
$r_u, r_L(r)$	分别表示上、下边界	$\Delta+, \Delta-$	与一般差分符号意义同
s	熵		
S	一向量 (见文中)		
T	温度		
t	时间		
u, v	分别表示轴、径向速度		

一、前 言

喷流场是指气流从一个或多个喷管排到外界流场中所形成的流场。如导弹尾喷流场就是最典型的喷流场。当航天航空技术发展一定程度后, 喷流场是这门技术最关心的问题之一。例如, 在导弹起飞时, 喷流对地面设备、舰船甲板、发射箱等的影响; 有翼导弹的喷流对其弹身气动控制系统性能的影响以及喷流内离子对电子通讯 (包括自身的通讯) 系统的干扰等问题, 都需要解决。国外在这方面的研究自50年代末便开始了。特别是近几年来, 美国围绕航天飞机的设计问题, 对尾喷流做了很多工作。近几年来, 笔者也和兄弟单位的有关专

业人员合作开展了尾喷流的研究工作取得一定成果。本文的内容正是上述两单位协作研究过程的进展报道。文中将一个效率较高的差分格式经必要的改进后用于求解超——超喷流场。

在本文工作开始之前, M. 隐式法大都用于求解时间相关的流场^[2]。笔者根据 M. 隐式法的实质特点, 试图用它作空间步进地求解尾喷流场。(目前只限于求超——超喷流)。为此, 笔者把 M. 隐式法的公式由时间相关法时的形式转换为空间步进时的表达式。正当这一理论推演工作完成后即调试程序时期, 获悉 Lawrence^[3] 等完成了用 M. 隐式空间步进法求解了二维压缩拐角流场的工作。仔细一看, 他们的处理方法与时间相关法的 M. 隐式法类似, 故公式与原方法无多大区别。本文与他们不同。本文这样处理的好处是节省计算机内存且提高效率。另外, 本文的求解域的下边界是轴线, 因此边界处理法也与 L. 等人的完全不同, 这是因为 L. 氏等的流场是平面的。对 M. 隐式法来说, 轴线边界条件要比平面的难处理得多。

二、喷流场的控制方程

1. 控制方程

若排气流与外流场都是轴对称的且两者同轴, 则喷流场是轴对称的。若排气流与外流都是超音速流的则称之为超——超喷流。

在柱坐标系下, 轴对称定常流的控制方程经抛物化处理为

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial r} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \bar{G}_1}{\partial r} + \bar{S}_1 \right) + \bar{S} \quad (1)$$

上式是以 L、V*、ρ*、T*、μ* 为主定参考量的无因次量方程, 式(1)中各量如下:

$$\bar{F} = r \cdot \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ \rho Hu \end{bmatrix}, \quad \bar{G} = r \cdot \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ \rho Hv \end{bmatrix}, \quad \bar{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{S}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tau_{\theta\theta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{G}_1 = r \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xr} \\ \tau_{rr} \\ \frac{c_p T^*}{Pr V^{*2}} \frac{\partial T}{\partial r} + u \tau_{xr} + v \tau_{rr} \end{bmatrix}$$

式中 $Re = L \cdot \rho^* \cdot V^* / \mu^*$ 为雷诺数, $\tau_{xr} = \mu \frac{\partial u}{\partial r}$

$$\tau_{rr} = \frac{2}{3} \mu \left(2 \cdot \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{U}{r} \right), \quad \tau_{\theta\theta} = \frac{2}{3} \mu \left(2 \cdot \frac{v}{r} - \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

方程(1)中设:

a. 流体的第二粘性为零, 即 $\lambda = -\frac{2}{3} \mu$

b. 紊流 Pr 数与层数 Pr 数相等。

方程(1)虽然形式是抛物化的, 但在亚音速区仍不能稳定的步进, 其根源就在于 $\frac{\partial p}{\partial x}$ 的作用。

2. 解域的变换及方程的变换

求解喷流时,一般都以轴线为解域的下边界,而上边界是变化的。为了划分网格上的方便,作如下解域变换:

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{r - r_L}{r_u - r_L}$$

此时,解域变为矩形域,而方程(1)变为:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial G_1}{\partial \eta} + S_1 \right) + S \quad (2)$$

式中

$$F = (r_u - r_L) \bar{F}; \quad G = \bar{G} + \eta_x \cdot F$$

$$S = (r_u - r_L) \bar{S}; \quad S_1 = (r_u - r_L) \cdot \bar{S}_1$$

G_1 的形式同 $\bar{G}_1$,只要将其中的 τ_{xr} 、 τ_{rr} 分别代之以 $\tau_{\xi\eta}$ 和 $\tau_{\eta\eta}$ 即可。

三、超——超喷流的Mac Cormack隐式解

1. 定解域及来流条件

设轴对称喷流以 M_j 的马赫数排入马赫数为 M_∞ 、方向与内流平行的外流中($M_j > 1$, $M_\infty > 1$)。根据有关的实验结果^[6]推知:喷管壁内外附面层对喷流场影响范围很小。本文为了求解上的方便,不考虑附面层影响,也不考虑喷管底部壁环附近可能存在的分离区。

解域的到来边界为喷管出口截面,已知该边界上的参数 M_j 、 M_∞ 、 T_j 、 T_∞ 、 ρ_j 、 ρ_∞ 、 θ 等。

$$\text{下边界为轴线,其上 } r=0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial r} = 0。$$

上边界是这样的:当 $0 \leq r_s \leq r_m$ 时,上边界线为弓激波线(bow shock),即 $r_u = r_s$;当 $r_s > r_m$ 时,上边界线取一直线,即 $r_u = r_m$ 。 r_m 是一可选择的参数,它与 P_j/P_∞ 、 M_j 、 M_∞ 有关。所选的 r_m 应满足如下条件:a)、 r_m 足够大,以致在所求解的 x 范围内,混合层的上边界不会与 r_m 线相交。b)、为使 r 向格点不致太稀, r_m 又不能太大。直线 r_m 与弓激波线的交点横坐标记为 x_s 。

求解过程中,流场内激波自动捕捉。弓激波由特征线关系式和激波关系式确定。

2. 数值边条处理的困难及改进的M.隐式法

大家知道,M.隐式法在求解时是上、下扫描的过程,在预校两步中,至少有一步需要预先给出 δF_1^{n+1} (或 δF_1^{n+1})的值,而点“1”是在轴线上的,即 $r_1 \equiv 0$,故 δF_1^{n+1} (或 δF_1^{n+1})恒为零。这就导致了如下困难:无论 $(n+1)$ 截面上第一点参数如何变化,在隐式的下边界条件上都得不到反映,这样求不出令人满意的结果。数值试验证明了这一点。为了获得较好的结果,本文采取如下方法:

在应用M.隐式时,其显式步方程仍然用守恒型方程(2)式。这样取有利于捕捉激波;在隐式步的求解时,其差分方程由如下控制方程导出

$$\frac{\partial(F/r)}{\partial \xi} + \frac{\partial(G/r)}{\partial \eta} = \frac{1}{r \cdot Re} \left(\frac{\partial G_1}{\partial \eta} + S_1 \right) + \frac{S}{r} + S_2 \quad (3)$$

隐式步的被求量取为 $\delta(F/r)$ 。于是M.隐式法的差分方程组系统可归纳为

$$\text{予测步} \begin{cases} \Delta F^n = -\frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} \Delta + G^n + \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} \frac{1}{Re} \Delta + G_1^n + \Delta \xi (S_1^n / Re + S^n) \\ \left(\left(I + \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} \bar{A}^n \right) \delta(F/r)_{i+1}^{n+1} = \Delta(F/r)^n + \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} \bar{A}_{i+1}^n \delta(F/r)_{i+1}^{n+1} \right. \\ \left. F_{i+1}^{n+1} = F_i^n + \delta F_{i+1}^{n+1} \right. \end{cases}$$

校正步与此类似, 其中 $\bar{A} = S_\xi^{-1} \bar{D}_A S_\xi$, S_ξ 为 $\frac{\partial(G/r)}{\partial(F/r)}$ 的左特征向量。经推导得

$$S_\xi = \begin{pmatrix} -2\alpha & u & v & 0 \\ H & 0 & 0 & -1 \\ H & -\left(u + c \frac{uc + vB}{2\beta\alpha}\right) & -\left(v + c \frac{vc - uB}{2\beta\alpha}\right) & 1 \\ H & -\left(u + c \frac{uc - vB}{2\beta\alpha}\right) & -\left(v + c \frac{vc + uB}{2\beta\alpha}\right) & 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{D}_A$ 为对角矩阵, 其对角元素为

$$\bar{d}_i = \max\left(0, |d_i| + vis - 0.5 \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi}\right)$$

而 $vis = 2\mu\eta r^2 / (Re \cdot \rho \cdot \mu \cdot \Delta \eta)$, $d_i = \eta_r \cdot d'_i + \eta_x \cdot I$

$$(d'_1, d'_2, d'_3, d'_4) = (tg\theta, tg\theta, tg(\theta + \mu), tg(\theta - \mu))$$

$$B = \sqrt{u^2 + v^2 - c^2}, \quad \alpha = 0.5(u^2 + v^2), \quad \beta = \gamma - 1, \quad I \text{ 表单位矩阵。}$$

由前面的差分方程系统可看出, 在M隐式法的求解过程中, 没有出现过矩阵求逆的数值运算。虽然出现过 $(I + \Delta \xi / \Delta \eta \cdot \bar{D}_A)^{-1}$, 但这是个对角矩阵, 只要将其中的非零元素都倒过来便得到它的逆阵。而文〔3〕中的处理法(前言中提到过)导致了每步需求一个非稀疏的k阶矩阵的逆(K为N-S方程组中方程的个数)。因此本文的M.隐式法的求解步骤较简单、运算量少、占内存量少。

3. 紊流模型

在两股超音速气流之间的混合层内的紊流, 本文采用Ferri〔7〕紊流模型来模拟。

$$\text{初始区: } \mu_t = \rho = \alpha_t \cdot 0.00137 \cdot X \cdot |\rho_\phi \cdot u_\phi - \rho_e \cdot u_e| \quad (0 \leq x \leq x_{in})$$

$$\text{发展区: } \mu_t = \rho = \alpha_t \cdot k_t \cdot b_{\frac{1}{2}} \cdot |\rho_\phi \cdot u_\phi - \rho_e \cdot u_e| \quad (x > x_{in})$$

x_{in} 是发展区与初始区的交点。

4. 算例及结果分析

隐式解超——超喷流的第一个算例是来流参数为 $M_j = M_\infty = 3$, $p_j/p_\infty = 10$, $T_j/T_\infty = 6$, $Re_j = 10^6$, $\alpha_t = 0.4$ 。第二算例为 $M_j = 5$, $M_\infty = 3$, 其他参数同第一例。

图1和3中实线, 虚线分别表示各算例的流场主要轮廓线。隐式求解时, 第一例最佳CN数是3, 第二例CN=5。由该图可见, 两种结果基本一致。图1中“▲”或“▼”是文献〔5〕的结果, 文献〔5〕采用显式M.法计算了超——超喷流场, 且画出了用M.显式求解的流场主要轮廓线等曲线。将本文第一例结果与文献〔5〕的结果相比, 发现它们基本一致。

比较本文的显式和隐式法所得流场轴线上的 M 、 T 、 P 分布曲线,可看出:隐式法与显式法的结果总的趋势是一致的,第二算例比第一算例符合更好。只是在较小的范围内,其起伏不一致。这种不一致性在反射点之后较明显。再仔细分析流场参数的径向分布曲线,发现:显、隐式法的差别在流场内部比轴线附近小得多。尤其是 M 、 T 、分布,显、隐式法结果吻合得相当好(参见图2和4),而压力分布 $p-r$ 在反射点之前各截面也很吻合,只是在反射点后,上行反射斜激波的右侧的压力曲线,隐式的不如显式的尖锐。综上所述,隐式法与显式法比较吻合。

本文的理论结果得到的流场轮廓图与笔者等所做实验结果基本一致。

四、总结和展望

1. 从以上两个算例的情况可看出:隐式法在精度仍保持与其显式相当的情况下,步长可扩大到 $\Delta x_{C.F.L.}$ 的3~5倍。CPU效率是显式的两倍左右。

2. 本文首次用 M ·隐式空间步进法求解了喷流场。并第一次导出了空间步进的 M ·隐式法的有关公式。这些公式可用于轴对称流和平面流的 M ·隐式空间步进法求解的问题中。为解决轴线边界条件的处理法问题对 M ·隐式法求解公式所进行的修改对处理其他有关轴线边界条件的问题有借鉴意义。

3. M ·隐式法最适合于解那种各部分区域内的 $\Delta x_{C.F.L.}$ 要求大不一样的流场。如果要更精确的计算喷流场,可将它的混合层内网格分细,此时若用 M ·隐式法求解,则其效率与 M ·显式法相比将大大提高。

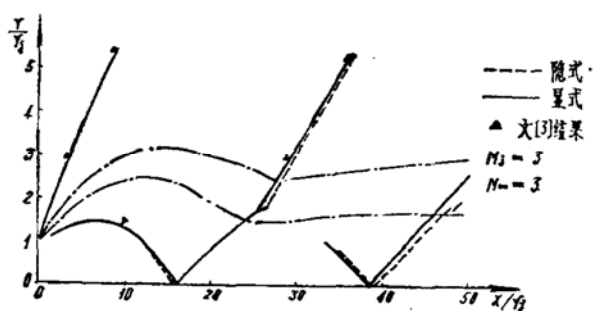


图1 流场结构(显、隐解比较)

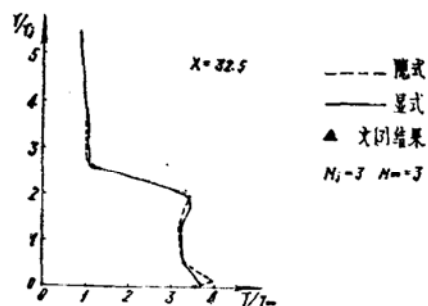


图2 径向温度分布

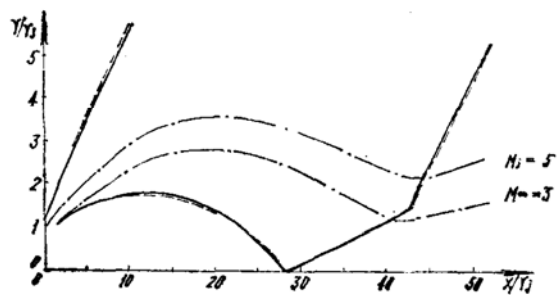


图3 流场结构

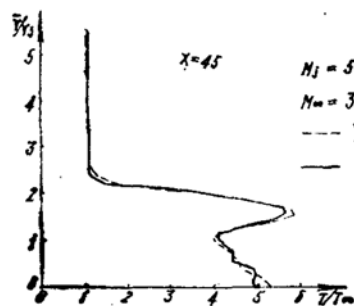


图4 径向温度分布

参 考 文 献

- 〔1〕 蒋辉国: 空间步进的Mac Cormack隐、显式法求解轴对称喷流场。硕士论文, 国防科技大学一系, 1984.12.
- 〔2〕 Mac Cormack R.W., A numerical method for solving the equations of compressible viscous flow, AIAA J., Vol.20 No.9, 1982.
- 〔3〕 Lawrence S.L. & Tanneh John, C., Application of the implicit Mac Cormack scheme to the PNS equations, AIAA 83-1956.
- 〔4〕 Schiff L.B., Numerical simulations of steady supersonic viscous flow, AIAA 79-130 (17 Aerospace Science Meeting).
- 〔5〕 Dash S.M. & Pergament H.S., A computations system for the analysis of mixing/chemical/shock processes in supersonic internal and exhaust plume flowfields, AIAA 80-1255.
- 〔6〕 Rousso M.D. & Kochendorfer F.D., Velocity and temperature fields in circular jet expanding from choked nozzle into quiescent air, NACA RME51-F18, July 1951.
- 〔7〕 Gupta R.N. & Wakelyn N.T., Theoretical study of reactive and nonreactive turbulent coaxial jets, NASA TND-8127 pp18.