固体火箭发动机燃烧室的概率设计

余 利 风

摘　要

本文从概率出发，概括了概率工程设计方法。分别确定了燃烧室壳体，绝热层，药柱的失效模型与传递函数。利用计量型的基本方法计算出均值与方差，进行了可靠性设计。文中还讨论了可靠性优化问题。

一、引　言

可靠性与固体发动机的性能一样，也是发动机的一种属性。可靠性水平是在设计阶段就确定下来的。只要沒有根本的设计更改，随后的试验和生产都不可能提高。概率设计在工程实践中已得到广泛的应用。计数型的设计有比较成熟的方法。对于批量很小，试验费用昂贵的产品则需要从实际的物理模型出发，采用计量型的办法。

装药燃烧室是固体火箭发动机的主要部件，由壳体，绝热包覆层，药柱三大部分组成。在发动机工作过程中，壳体应保证足够的承载能力。药柱不应有宏观裂纹与脱粘。绝热包覆层不破坏或烧穿等等。在燃烧室设计阶段，应该对这些部件制定可靠性指标。优秀的设计师要充分运用可靠性分析的工程手段，在现有的材料，工艺水平条件下，对各个环节进行可靠性指标协调，使产品达到概率最优状态。

由于试验费用极高，固体火箭发动机用计数型的办法求均值与标准差是难以办到的。因此本文提出了能求各组件的破坏（或失效）模型，并根据不同模型求能承受的工作条件，称为“能力函数” C。同时求施加于该模型可靠工作的要求，称为“要求函数” R。找到可靠性特征值的均值与方差，将计数型转化为计量型。用概率工程的办法导出失效模型特征量之间的关系，同时注意各量的易测性与工艺的可实现性，用可靠性指标进行特征量的数值分配。这样把结构设计，材料，加工，检测技术联系起来。该方法摆脱了以前用固定的，静止的观点进行设计的老框框，而是密切联系实际，能适应材料，工艺提高的要求，对研制过程具有指导性的意义。

二、概率设计方法

在一个复杂系统中，单个元件的故障就可能导致严重的后果。因此，可靠性设计需要一种在设计阶段估计元件可靠性的方法。可靠性概念的基础是已知元件具有某一承载能力，如果承载条件所引起的载荷超过这一承载能力就会失效。常规的设计方法，它是以诸如安全系数，安全储备等为基础的，很少给出元件故障概率的指标。设计者使用高于某一预想值的安全系数就可以完全避免元件失效。事实上，对于相同的安全系数，失效概率可以由低值变化到不许可的高值。只有当安全系数的值是根据类似于所研究的元件的大量经验来确定时，才能证明使用的安全系数是正确的。此外，设计变量和参数常常是随机变量，常规设计方法完

全忽略了这一事实。本文所讨论的概率设计是将设计的概率本质应用于实际工程的一种方法。对所研究的工程，首要的是求得失效模型与传递函数。确定零部件在工作过程中的失效模型。并根据该模型求出所能承受的能力函数C和用类似的方法求出施加于该模型可靠工作的要求函数R[1]。现定义能力函数

$$C = f_c\ (x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots x_n) \tag{1}$$

相应地定义要求函数

$$R = f_R\ (y_1,\ y_2\cdots\cdots y_n) \tag{2}$$

式中x_i，y_i，y_i均为连续的随机变量。

有了能力与要求函数C//R，就有了概率设计的基础。显然，C//R函数的正确性对可靠性计算结果影响较大。在选取C//R函数时，应持慎重、经过实践验证的、或者在实际测定后经过修正的函数。

在某些情况下，C//R函数还不尽合理，需要依赖于经验。函数中随机变量x_i，y_i的分布函数在许多实际问题中是很难求得的。然而连续型的函数通常为正态分布。为了进行可靠性估计，需要求函数的特征量。最重要的特征量是均值与方差。

U//R函数的均值为：

$$\begin{cases}\overline{C} = f_c(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2\cdots\cdots\bar{x}_n) + \Delta_1 + \Delta_2 \\ \overline{R} = f_R(\bar{y}_1,\ \bar{y}_2\cdots\cdots\bar{y}_n) + \Delta_1' + \Delta_2'\end{cases}$$

式中不独立修正量Δ_1，Δ_2，Δ_1'，Δ_2'在计算中略去。方差为

$$\begin{cases}\sigma_c^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_c}{\partial x_i} 1 x_i = \bar{x}_i\right)^2 \sigma_i^2 \\ \sigma_R^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_R}{\partial y_i} 1 y_i = \bar{y}_i\right)^2 \sigma_i^2\end{cases} \tag{4}$$

上式中同样略去了小量。

能力C为正态分布时的概率密度函数为：

$$f_1(C) = \frac{1}{\sigma_c\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{c-\bar{c}}{\sigma_c}\right)^2\right],\quad -\infty < c < \infty \tag{5}$$

同时，要求R为正态分布时的概率密度函数为

$$f_2(R) = \frac{1}{\sigma_R\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{R-\overline{R}}{\sigma_R}\right)^2\right],\quad -\infty < R < \infty \tag{6}$$

现定义$y = c - R$。则显然随机变量y也是正态分布的，其均值和方差分别为：

$$\bar{y} = \bar{c} - \overline{R} \tag{7}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_c^2 + \sigma_R^2} \tag{8}$$

则可靠度q可用y来表达：

$$q = p(y > 0)$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y}\right)^2\right]dy$$

若设$Z=(y-\bar{y})/\sigma_y$，则$\sigma_y dz=dy$。当$y=0$时，Z的下限为

$$Z=\frac{0-\bar{y}}{\sigma_y}=-\frac{\overline{C}-\overline{R}}{\sqrt{\sigma_c^2+\sigma_R^2}} \tag{9}$$

且当$y\to+\infty$时，Z的上限$\to+\infty$。因此

$$q=\frac{1}{\sqrt{2x}}\int_{-\frac{\overline{C}-\overline{R}}{\sqrt{\sigma_c^2+\sigma_R^2}}}^{\infty} e^{-Z^2/2}dz \tag{10}$$

式中Z为标准正态随机变量。式(10)的可靠度q明显地与积分下限有关，通过降低下限 可 以得到较高的可靠度值。把积分下限的负值表示为

$$Z_o=\frac{\bar{c}-\overline{R}}{\sqrt{\sigma_c{}^2+\sigma_R{}^2}} \tag{11}$$

则Z_o定义为概率安全余量。在进行概率设计时，(10)式需查表，使用起来不方便，不易进行函数转换与逆运算。在此采用下述的近似式[2]，形式简单易记，用函数型 计 算 器可快速地求出近似值，其精度在诸多场合是足够的。对于燃烧室的概率工程设计也是满足的。

由于 $\frac{1}{\sqrt{2x}}\int_o^{Z_o}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\approx\frac{1}{2}\sqrt{1-e^{-\alpha Z_0^2}}$

式中 $\alpha=0.623$。根据以上的结果，可以进行可靠度的运算。

$$q=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{Z_o}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\approx0.5+\int_o^{Z_o}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$\approx\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-e^{-0.623}Z_o^2}$$

亦即：$q\approx\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left\{1-\exp\left[-0.623\frac{(\bar{c}-\overline{R})^2}{\sigma_C{}^2+\sigma_R{}^2}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$ (12)

平均安全系数定义为$n=\bar{c}/\overline{R}$，而且用V_C与V_R来分别表示能力和要求的变差系数。并定义： $V_C=\sigma_C/\bar{c}$和$V_R=\sigma_R/\overline{R}$

V_C，V_R主要地与材料工艺有关。质量控制的主要方向是控 制V_C，V_R值。由(11)式 可 以 得到：

$$Z_o=\left(\frac{\bar{c}}{\overline{R}}-1\right)\Big/\sqrt{\left(\frac{\sigma_C}{\overline{R}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_R}{\overline{R}}\right)^2}=\frac{n-1}{\sqrt{V_C{}^2n^2+V_R{}^2}} \tag{13}$$

将(11)式结果代入(12)式得：

$$q=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left\{1-\exp\left[-0.623\frac{(n-1)^2}{V_e{}^2n^2+V_R{}^2}\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

(14)式建立了安全系数n，能力变差系数V_C，要求变差系数V_R，可靠度q之间的关系。这是进行概率工程设计的一个重要公式。

按照上述的基本方法，可以计算燃烧室的可靠度。显然在固体发动机中，壳体，绝热包覆层，药柱组成的燃烧室是一个可靠性串联系统。其可靠度为

$$q=\prod_{i=1}^{n} qi \tag{15}$$

三失效模型与传递函数

1. 壳体

设计燃烧室壳体时，主要是考虑壳体的爆破压力问题。经常采用的是环向应力——强度破坏模型。下面分别求纤维缠绕壳体与钢壳体的C函数。对于纤维缠绕壳体，能力函数为：

$$C=f_c(N,f,R_0\alpha)=\frac{2Nf}{R_0(2-tg^2\alpha)} \tag{16}$$

式中N为纤维缠绕的环向层数，f为纱带发挥的张力，α为缠绕角，R_0为壳体内半径。在设计时，如何选取f值是比较重要的，取值是否合理直接影响到结构的强度估计。应当指出f值跟很多因素有关。如纱带的种类与状态；胶粘剂的种类；含胶量的多少；张力的均匀程度；工艺参数与壳体尺寸的影响等等。应结合实践合理地选取。

对于钢壳体，能力函数为：

$$C=f_c(\sigma,R_0,\delta)=\frac{\sigma\delta}{R_0} \tag{17}$$

式中σ，δ，R_0分别为壳体纵向焊缝的强度极限，壳体的厚度与内半径。应该指出的是要用断裂力学的方法来表达C数，因目前焊缝的断裂韧性Kic值较难定，故用(17)式代替。基本方法是一样的。要求函数可以写成：

$$R=f_R(a,c^*,\rho,A_b,A_t)=\left(\frac{ac^*\rho A_b}{A_t}\right)^{\frac{1}{1-n}} \tag{18}$$

式中a,c^*,ρ,n分别为推进剂的燃速系数，特性速度，密度，燃速指数。A_b，A_t分别为药柱的燃烧面积与喉径截面积。下面我们分别求C//R函数的场值与方差。为方便起见，设计变量的均值不加“－”。对于纤维缠绕的壳体，在(16)式中，可以认为N，α为常量，则

$$\begin{cases}\bar{c}=\dfrac{2Nf}{R_0(2-tg^2\alpha)}\\ \sigma_c{}^2=\bar{c}^2\{(\sigma_f/f)^2+(\sigma_{R0}/R_0)^2\}\\ V_c{}^2=\sigma_c{}^2/\bar{c}^2\end{cases} \tag{19}$$

对于钢壳体：

$$\begin{cases}\bar{c}=\sigma\delta/R_0\\ \sigma_c{}^2=\bar{c}^2\{(\sigma_s/\sigma)^2+(\sigma_{R0}/R_0)^2+(\sigma_s/\delta)^2\}\\ V_c{}^2=\sigma_c{}^2/\bar{c}^2\end{cases} \tag{20}$$

而要求函数的均值与方差为：

$$\begin{cases} \overline{R} = \left(\dfrac{ac^*\rho A_b}{A_t}\right)^{\frac{1}{1-n}} \\ \sigma_R{}^2 = \left(\dfrac{\overline{R}}{1-n}\right)^2 \{(\sigma_a/a)^2 + (\sigma_{c^*}/c^*)^2 + (\sigma_\rho/\rho)^2 + (\sigma_{Ab}/A_b)^2 + \\ \qquad + (\sigma_{At}/A_t)^2\} + \left(\dfrac{\ln\overline{R}}{1-n}\right)\left(\dfrac{\sigma_n}{1-n}\right)^2 \\ V_R{}^2 = \sigma_R{}^2/\overline{R}^2 \end{cases} \tag{21}$$

将(19)，(21)式代入(14)式，或者(20)，(21)式代入(14)式就可以进行概率设计。

2. 绝热层

在设计阶段，把燃烧室中的绝热层全部列入需要计算的区域。在全区域中，设计厚度应进行续个断面的校核。但在实际计算中，容易确定危险部位1,2,……,j断面。通过对代表性的j个断面的校核，就足以代表整个情况。

$$\bar{c} = f_c(h) = h - h_o \tag{22}$$

式中h为j断面设计的名义厚度，h_o为燃烧结束后未炭化的厚度。

R传递函数用下面的简化方法建立。设所研究的模型可认为在炭化过程中不烧蚀，那末绝热层的总厚度不变。按这样的假设可以得到简化的炭化厚度表达式[3]，再结合文献[4]所介绍的等温线移动速度，可以得到R函数为：

$$R = f_R(K_c, \rho, H, p, t) = kk_c p^{0.8} t^{0.5}/\rho H \tag{23}$$

式中k为系数，可以根据试车后的实测数据进行修正。K_c，ρ，H为绝热层材料的导热系数，密度与热容量。工作时间t应是实际的绝热层烧蚀时间。p为燃烧室压力。因此可以求得：

$$\begin{cases} \bar{c} = h - h_o \\ \sigma_c{}^2 = \sigma_h{}^2 + \sigma_{ho}{}^2 \end{cases} \tag{24}$$

R函数用同样的办法求得：

$$\begin{cases} \overline{R} = kk_c p^{0.8} t^{0.5}/\rho H \\ \sigma_R{}^2 = \overline{R}^2\{(\sigma_k/k)^2 + 0.64(\sigma_p/p)^2 + (\sigma_{Kc}/k_c)^2 + 0.25(\sigma_t/t)^2 + \\ \qquad (\sigma_\rho/\rho)^2 + (\sigma_H/H)^2\} \\ V_R{}^2 = \sigma_R{}^2/\overline{R}^2 \end{cases} \tag{25}$$

仿照上例可进行效率设计。

3. 药柱

推进剂药柱系统的破坏模型是最复杂的。需要进行有限元分析。尤其是三维药柱，尚没有一个可行的解析方法。然而经验表明：药柱的硫化降温与点火内压两种情况下的可靠性计算仍是有效的。对于硫化降温

$$\begin{cases} \overline{C} = \quad {}_1 \\ \sigma_c^2 = \sigma^2{}_{\varepsilon 1} \\ v_c^2 = \sigma_c^2/\overline{C}^2 \end{cases} \tag{26}$$

$$
\begin{cases}
\overline{R}=\dfrac{-2k_1m(1-v^2)(\alpha-\alpha_c)\Delta T}{1+m^2(1-2v)}+U(\alpha-\alpha_c)+\alpha\Delta T \\
\sigma_R^2=\left[\dfrac{-2m(1-v^2)(\alpha-\alpha_c)\Delta T}{1+m^2(1-2v)}\right]^2\sigma_{k1}^2+ \\
\quad+\left\{\dfrac{2k_1(1-v)(\alpha-\alpha_c)\Delta T[-1-m^2(1-2v)+2m(1-v^2)]}{[1+m^2(1-2v)^2]^2}\right\}^2 \\
\quad\cdot\sigma_m^2+\left[\dfrac{-2k_1m(1-v^2)(\alpha-\alpha_c)}{1+m^2(1-2u)}+\alpha\right]^2\sigma_{\Delta T}^2 \\
v_R^2=\sigma_R^2/\overline{R}^2
\end{cases}
\tag{27}
$$

上式中，ε_1为在硫化降温的速率下，由推进剂主应变曲线上查得所对应的推进 剂 伸 长率。k_1为常数，ΔT为温差，m为药柱的外径与内径比。α、α_c，u分别为推进剂的线胀系数，壳体的线胀系数与推进剂的泊桑比。在计算中把u，α，α_c看作不变量。

对于点火内压为

$$
\begin{cases}
\overline{C}=\varepsilon_2 \\
\sigma_c^2=\sigma_{\varepsilon 2}^2 \\
V_c^2=\sigma_{tc}^2/\bar{c}^2
\end{cases}
\tag{28}
$$

$$
\begin{cases}
\overline{R}=\dfrac{k_2m^2PR_o}{\delta E} \\
\sigma_R^2=\overline{R}^2\{(\sigma_{k3}/k_2)^2+(\sigma_p/p)^2+(\sigma_m/m)^2 \\
\quad+(\sigma_{Ro}/R_o)^2+(\sigma_\delta/\delta)^2\} \\
V_R^2=\sigma_R^2/\overline{R}^2
\end{cases}
\tag{29}
$$

式中 $_2$为在点火内压的速率下，对应于主应变曲线上的值。k_2为系数，对于圆管装药，取$k_2=1$。E为壳体的弹性模量。

四、概 率 优 化

工程设计的特性取决于定值的和可调的设计参数，从以上明显地看出，可靠度是C分布和R分布的函数，而这些分布具有与之相关的某些参数，于是，可靠度是这些参数的函数[5]。设$C_1(\overline{C})$表示能力均值的费用函数，较高的$\overline{C}$值要求使用较好的材料与工艺，显然要增加费用。从可靠性出发，要求有较低的σ_c值。这就必须控制引起C变化的因素。因而$C_2(\sigma_c)$是σ_c的函数。设$C_3(\overline{R})$和$C_4(\sigma_R)$分别为与要求R均值与方差有关的费用函数。在研究最优化问题时，希望总费用Q最小。那末，这一问题的提法为：求[$\overline{C}$，$\overline{R}$，σ_c，σ_R]，使目标函数θ最小，即：

$$
\theta_{min}=C_1(\overline{C})+C_2(\sigma_c)+C_3(\overline{R})+C_4(\sigma_R) \tag{30}
$$

约束条件是必须具有某一需要的概率完全余量Z'。写成

$$
\frac{\overline{c}-\overline{R}}{\sqrt{\sigma_c^2+\sigma_R^2}}\geqslant Z' \tag{31}
$$

应用拉格朗日函数求极值。则

$$L(\overline{C}, \overline{R}, \sigma_c, \sigma_R) = C_1(\overline{C}) + C_2(\sigma_c) + C_3(\overline{R}) + C_4(\sigma_R) + \\ + \lambda[\overline{C} - \overline{R} - Z'(\sigma_c + \sigma_R)^{1/2}] \quad (32)$$

将拉格朗日函数对各变量进行微分并令其等于零，亦即

$$\frac{\partial L}{\partial \overline{C}} = \frac{\partial C_1(\overline{C})}{\partial \overline{C}} + \lambda = 0 \quad (33)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_c} = \frac{\partial c_2(\sigma_c)}{\partial \sigma_c} - \lambda Z' \sigma_c (\sigma_c^2 + \sigma_R^2)^{1/2} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \overline{R}} = \frac{\partial C_3(\overline{R})}{\partial \overline{R}} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_R} = \frac{\partial C_4(\sigma_R)}{\partial \sigma_R} - \lambda Z' \sigma_R (\sigma_c^2 + \sigma_R^2)^{1/2} = 0 \quad (35)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \overline{C} - \overline{R} - Z' \sqrt{\sigma_c^2 + \sigma_R^2} = 0 \quad (36)$$

上述五个方程包含五个未知数。当知道C_i之后即可进行求解。

在进行概率设计时，必须掌握研制过程中大量的经济费用和数据信息。这些信息主要来于总结。信息不足是概率设计中的主要困难。因此需要对已有经验数据进行分析归纳，并根据材料与工艺水平合理地确定数值范围。在草图设计时，就要引用概率的方法。当提出可靠度q的指标要求后，就可以确定Z_o值。有了σ_c，σ_R就可以确定C//R函数的均值，定出基本的设计尺寸。

在具备费用资料时，结合周期，风险性一起进行概率优化工作。总之，概率设计比习惯的设计方法具有明显的优点，这一新的设计方法将在固体发动机设计与研制过程中起着重要的作用。

参 考 文 献

〔1〕 Herrmann C.R.Ingram G. E. and WeikerE. L.: An application of the "reguiremeat VS capability" analysis to estimating design reliability of solid roeket motors NASA N70-22698 (NASA CR1503).

〔2〕 陈大炎：正态分布函数值的近似计算。中国质量管理，1984.1.

〔3〕 Ricciardi A.Difesa E.Spazio; A simplified method to predict the charred thiekness of the thermal insulation in solid roeket motors. AIAA-81-1517.

〔4〕 伏尔科夫 E, Б 苏达科夫P.C 舍里津T.A著：火箭发动机可靠性理论基础。国防工业出版社，1977.

〔5〕 卡帕 K.C 兰伯森 L.R.著：工程设计中的可靠性。机械工业出版社，1984.