

喉衬热结构数值分析

吴景福 刘连元

摘 要

本文采用变分原理有限元法计算喉衬内部的温度、热应变和热应力分布及其随时间变化,并给出计算程序框图。与解析解相比,温度及应力计算具有相当的精度,工程计算亦取得良好效果。

符 号 表

C	比热		
h_c	对流换热系数	ε, γ	应变
K	导热系数	μ	泊桑比
T	温度	E	杨氏模量
t	时间	下标:	
r, z	座标	zr	zr平面的
ρ	密度	r θ	r θ 平面的
σ, τ	应力	i, j, m	序号

一、引 言

喉衬热结构破坏,是固体火箭发动机喷管失效的主要原因,往往酿成灾难性事故。因此,确定合理的喉衬热结构,应能避免或减轻热应力破坏。但是,喉衬设计的传统方法,是凭借经验判断和工程类比,未能预测是否会出现热结构破坏,而一旦出事,代价又付之过大。我们在开展喷管内流场、热流、烧蚀、温度与应力分布计算方法探讨的基础上,尝试将这一系列工程计算串成一个综合计算的源程序,专用于喉衬热结构数值分析。

工程计算结果表明,这种尝试是成功的。对既定结构的喉衬进行计算,其危险截面与残骸分解结果基本相符;运用于新喉衬设计,计算预测亦为后来的地试结果所证实。

数值计算采用一元等熵流动,巴兹公式和动力学控制的烧蚀计算模型,运用变分原理有限元法计算轴对称非定常温度场和弹性热应力分布。本文仅介绍后一部分内容。

二、温度分布计算

喉衬内部温度分布计算是热应变和热应力计算的基础,亦是热化学烧蚀计算的重要参数。

1. 导热微分方程及其定解条件

对喉衬内部的非定常传热,其微分方程如下式:

3. 计算的基本公式

本文采用简便常用, 又可得到一定计算精度的三角形单元进行区域离散化, 并设单元内部的温度呈线性分布, 即

$$T^e = a_1 + a_2 r + a_3 z \quad (6)$$

对三个节点*i*、*j*、*m*有

$$\{T\}^e = \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_m & z_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

矩阵展开便得

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2\Delta} (a_i T_i + a_j T_j + a_m T_m) \\ a_2 &= \frac{1}{2\Delta} (b_i T_i + b_j T_j + b_m T_m) \\ a_3 &= \frac{1}{2\Delta} (c_i T_i + c_j T_j + c_m T_m) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} a_i &= r_j z_m - r_m z_j; & b_i &= z_j - z_m; & c_i &= r_m - r_j; \\ a_j &= r_m z_i - r_i z_m; & b_j &= z_m - z_i; & c_j &= r_i - r_m; \\ a_m &= r_i z_j - r_j z_i; & b_m &= z_i - z_j; & c_m &= r_j - r_i \end{aligned}$$

而

$$2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_m & z_m \end{vmatrix} = b_i c_j - b_j c_i \quad (9)$$

为三角形单元面积的两倍。

将式(8)代入式(6), 便可得到单元内部温度插值函数的一个重要关系式

$$T = \frac{1}{2\Delta} \left[(a_i + b_i r + c_i z) T_i + (a_j + b_j r + c_j z) T_j + (a_m + b_m r + c_m z) T_m \right] \quad (10)$$

若令

$$\left. \begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i r + c_i z) \\ N_j &= \frac{1}{2\Delta} (a_j + b_j r + c_j z) \\ N_m &= \frac{1}{2\Delta} (a_m + b_m r + c_m z) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

应有

$$T = [N_i N_j N_m] \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_m \end{Bmatrix} = [N] \{T\}^e \quad (12)$$

这样, 单元内部温度场 $T(r, z, t)$ 便被描述成仅与节点温度 T_i 、 T_j 、 T_m 有关的多元函数。相应地, 式(5)所示的泛函, 在单元域内定义时, 也是一个仅与节点温度有关的函数。在一定条件下, 这可以推广到整个区域, 从而使区域的温度场, 成为一个仅与区域内所有节点温度有关的多元函数。由此, 对泛函求变分的运算, 实际上被化成求多元函数的极值问题。即

$$\frac{\partial J(T)}{\partial T_i} = 0 \quad (i = i, j, m) \quad (13)$$

兹以 $\frac{\partial J(T)}{\partial T_i}$ 为例, 对内部单元的泛函求偏导。

对内部单元, $\oint h_c \left(\frac{1}{2} T - T_f \right) T dl = 0$, 因此

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(T)}{\partial T_i} = 2\pi \int \int \left[\frac{K_r}{2} \cdot 2 \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial T_i} + \frac{K_z}{2} \cdot 2 \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)}{\partial T_i} + \right. \\ \left. + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \cdot \frac{\partial T}{\partial T_i} \right] r dr dz \end{aligned} \quad (14)$$

整理可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(T)}{\partial T_i} = 2\pi \int \int_{\Delta} \left[\frac{K_r}{4\Delta^2} (b_i b_i T_i + b_j b_i T_j + b_m b_i T_m) + \frac{K_z}{4\Delta^2} (c_i c_i T_i + \right. \\ \left. + c_j c_i T_j + c_m c_i T_m) \right] r dr dz + \frac{2\pi c \rho}{2\Delta} \int \int_{\Delta} (a_i + b_i r + c_i z) \times \\ \times \frac{\partial T}{\partial t} r dr dz \end{aligned} \quad (15)$$

若令

$$F_i = 2\pi c \rho \int \int N_i \frac{\partial T}{\partial t} r dr dz$$

$$R_E = \frac{r_i + r_j + r_m}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{便有 } \frac{\partial J(T)}{\partial T_i} = \frac{2\pi R_E}{4\Delta} \{ K_r (b_i b_i \ b_j b_i \ b_m b_i) T \{T\}^e + K_z (c_i c_i \ c_j c_i \ c_m c_i) T \times \\ \times \{T\}^e \} + F_i \end{aligned} \quad (16)$$

同理, 可依次推出 $\frac{\partial J(T)}{\partial T_j}$ 和 $\frac{\partial J(T)}{\partial T_m}$, 综合便得

$$\left\{ \frac{\partial J(T)}{\partial T_i} \right\}^e \xrightarrow{i, j, m} \begin{Bmatrix} \frac{\partial J(T)}{\partial T_i} \\ \frac{\partial J(T)}{\partial T_j} \\ \frac{\partial J(T)}{\partial T_m} \end{Bmatrix} = [H]^e \{T\}^e + \{F_i\}^e \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} [H]^e = \frac{\pi R_E K_r}{2\Delta} \begin{Bmatrix} b_i b_i & b_j b_i & b_m b_i \\ b_i b_j & b_j b_j & b_m b_j \\ b_i b_m & b_j b_m & b_m b_m \end{Bmatrix} \\ + \frac{\pi R_E K_z}{2\Delta} \begin{Bmatrix} c_i c_i & c_j c_i & c_m c_i \\ c_i c_j & c_j c_j & c_m c_j \\ c_i c_m & c_j c_m & c_m c_m \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\{F_i\}^e = 2\pi c\rho \int_{\Delta} \int (N)^T \frac{\partial T}{\partial t} r dr dz$$

$$\begin{aligned} \therefore T &= (N)\{T\}^e \\ \therefore \frac{\partial T}{\partial t} &= (N)\left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\}^e \end{aligned}$$

$$\text{故 } \{F_i\}^e = 2\pi c\rho \int_{\Delta} \int (N)^T (N) \left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\}^e r dr dz = (P) \left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\}^e \quad (19)$$

$$\text{其中 } (P) = 2\pi c\rho \int_{\Delta} \int (N)^T (N) r dr dz$$

按极值条件, 应有

$$(H)\{T\}^e + (P)\left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\}^e = 0 \quad (20)$$

假定在时间 Δt 内 $\frac{\partial T}{\partial t}$ 呈线性变化, 则

$$\{T\}_i^e = \{T\}_{i-\Delta t}^e + \frac{\Delta t}{2} \left(\left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\}_{i-\Delta t}^e + \left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\}_i^e \right)$$

$$\text{即 } \left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\}_i^e = \frac{2}{\Delta t} (\{T\}_i^e - \{T\}_{i-\Delta t}^e) - \left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\}_{i-\Delta t}^e \quad (21)$$

$$\text{因此, } ((H)^e + \frac{2}{\Delta t}(P)^e)\{T\}_i^e = (P)\left(\frac{2}{\Delta t}\{T\}_{i-\Delta t}^e + \left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\}_{i-\Delta t}^e\right) \quad (22)$$

对内部单元总体, 应有

$$((H) + \frac{2}{\Delta t}(P))\{T\}_t = (P)\left(\frac{2}{\Delta t}\{T\}_{t-\Delta t} + \left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\}_{t-\Delta t}\right) \quad (23)$$

这就是全体内部单元的温度求解方程。

对边界单元, 计入边界换热, 对应的泛函为

$$\begin{aligned} X(T) &= 2\pi \int \int \left\{ \frac{K_r}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \frac{K_z}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 + c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \cdot T \right\} r dr dz + \\ &\quad + 2\pi \oint \left(\frac{1}{2} h_c T^2 - h_c T_f T \right) r dl \end{aligned} \quad (24)$$

显见, 与内部单元相比, 仅是增加了一个线积分项。由图 2 可见, 对流换热仅发生在 ij 边, 即线积分部分为

$$2\pi \int_{ij} \left(\frac{1}{2} h_c T^2 - h_c T_f T \right) r dl \quad (25)$$

为方便计, 将上式分解成两部分

$$X_{hc}^e = 2\pi \int_{ij} \frac{1}{2} h_c T^2 r dl \quad (26)$$

$$X_{hcf}^e = -2\pi \int_{ij} h_c T_f T r dl \quad (27)$$

将边界的分布热载荷集中到节点, 然后对泛函求偏导得

$$F_i^{hc} = \frac{\partial X_{hc}^e}{\partial T_i} = \frac{\pi L h_c}{6} (T_i (3r_i + r_j) + T_j (r_i + r_j)) \quad (28)$$

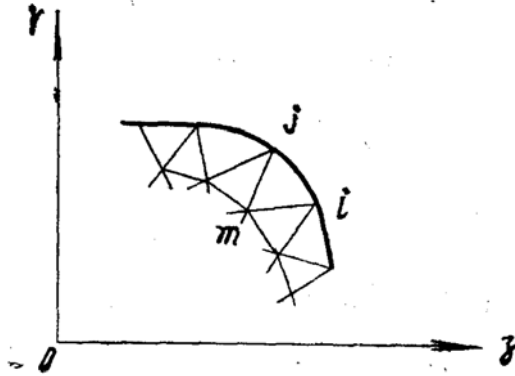


图2 区域的离散

$$F_j^{hc} = \frac{\partial x_{hc}^e}{\partial T_j} = \frac{\pi L h_c}{6} (T_i (r_i + r_j) + T_j (r_i + 3r_j)) \quad (29)$$

$$F_i^{hcf} = \frac{-\partial x_{hcf}^e}{\partial T_i} = \frac{\pi L h_c T_f}{3} (2r_i + r_j) \quad (30)$$

$$F_j^{hcf} = \frac{-\partial x_{hcf}^e}{\partial T_j} = \frac{\pi L h_c T_f}{3} (r_i + 2r_j) \quad (31)$$

注意到 F_i^{hc} 和 F_j^{hc} 中包含未知量 T_i 和 T_j ，因此须归入“刚度矩阵”，即

$$H_{ii}^e = H_{ii}^e + \frac{\pi L h_c}{6} (3r_i + r_j) \quad (32)$$

$$H_{ji}^e = H_{ji}^e = H_{ij}^e + \frac{\pi L h_c}{6} (r_i + r_j) \quad (33)$$

$$H_{jj}^e = H_{jj}^e + \frac{\pi L h_c}{6} (r_i + 3r_j) \quad (34)$$

至此，计算准备便算完成。对区域内所有单元的极值方程进行总体合成，便可得出

$$((H') + \frac{2}{\Delta t} (P)) \{T\}_t = (P) \left(\frac{2}{\Delta t} \{T\}_{t-\Delta t} + \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\}_{t-\Delta t} \right) + \{F_p\}_t$$

其中 $\{F_p\}_t$ 为移去未知量后的“热载”矢量组集。

这就是求解喉衬内部非定常温度场的高阶线性方程组。只要已知初始的温度分布

$\{T\}_{t=0}$ ，温度梯度 $\left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\}_{t=0}$ 和边界条件 $\{F_p\}_{t=0}$ ，选取合适的时间步长 Δt ，便可求得下一计

算时刻的温度分布 $\{T\}_{t+\Delta t}$ 。依次采用前一次计算结果作为初始条件，随后计算时刻的温度分布便可依此逐一计算出来。

三、热应力计算

热应力计算按弹性体假定进行。

1. 基本方程

柱坐标系轴对称体的应力平衡方程为

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (35)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (36)$$

式中 σ_r 、 σ_z 、 σ_θ 分别为径向、轴向和周向应力， τ_{rz} 为 rz 平面剪应力。

$$\text{对正交横向各向同性材料, } \{\sigma\} = [D](\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) \quad (37)$$

$$\text{其中 } \{\sigma\} = \{\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta, \tau_{rz}\}^T \quad (38)$$

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_r, \epsilon_z, \epsilon_\theta, r_{rz}\}^T \quad (39)$$

$$\{\epsilon_0\} = \{\alpha_r(T - T_0), \alpha_z(T - T_0), \alpha_r(T - T_0), 0\}^T \quad (40)$$

α_z 、 α_r 分别为轴向和径向热膨胀系数， T_0 为初始温度。

$$[D] = \frac{E_{zr}}{(1 + \mu_{r\theta})(1 - \mu_{r\theta} - 2n\mu_{zr})} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$D_{11} = n(1 - n\mu_{zr}^2), \quad D_{12} = n\mu_{zr}(1 + \mu_{r\theta}), \quad D_{13} = n(\mu_{r\theta} + n\mu_{zr}^2), \quad D_{14} = 0;$$

$$D_{21} = D_{12}, \quad D_{22} = 1 - \mu_{r\theta}^2, \quad D_{23} = n\mu_{zr}(1 + \mu_{r\theta}), \quad D_{24} = 0;$$

$$D_{31} = D_{13}, \quad D_{32} = D_{23}, \quad D_{33} = D_{11}, \quad D_{34} = 0;$$

$$D_{41} = 0, \quad D_{42} = 0, \quad D_{43} = 0,$$

$$D_{44} = \frac{(1 + \mu_{r\theta})(1 + n)(1 - \mu_{r\theta} - 2n\mu_{zr}^2)}{4(1 + \mu_{zr})} G;$$

$n = \frac{E_r}{E_z}$ ， E_z 、 E_r 分别为轴向和径向杨氏模量。 μ_{zr} 、 $\mu_{r\theta}$ 为泊桑比。剪切模量近似取

$$\text{为 } G = \frac{(1 + n)E_z}{4(1 + \mu_{zr})}$$

连续体在小位移假设下，其应变公式为

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{v}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (42)$$

2. 有限元计算公式

文献〔2〕、〔5〕、〔6〕已有详细论述，在此仅列出计算使用的主要公式。

(1) 单元刚度矩阵

$$[K]^e = \begin{pmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{im} \\ K_{ji} & K_{jj} & K_{jm} \\ K_{mi} & K_{mj} & K_{mm} \end{pmatrix}$$

$$K_{rs} = 2\pi \int_{\Delta} [B_r]^T [D] [B_s] r dr dz = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}$$

式中

$$H_{11} = \frac{\pi E_z}{2\Delta v_3} R_E \left[nv_1 b_r b_s + nv_2 (b_r + b_s) \frac{2\Delta}{3R_E} + mv_3 c_r c_s + F_{TN} \right]$$

$$H_{12} = \frac{\pi E_z}{2\Delta v_3} R_E \left[nv_4 C_s \left(b_r + \frac{2\Delta}{3R_E} \right) + mv_3 b_s c_r \right]$$

$$H_{21} = \frac{\pi E_z}{2\Delta v_3} R_E \left[nv_4 c_r \left(b_s + \frac{2\Delta}{3R_E} \right) + mv_3 b_r c_s \right]$$

$$H_{22} = \frac{\pi E_z}{2\Delta v_3} R_E [v C_r C_s + mv_3 b_r b_s]$$

Δ 见式(9)的三角形单元面积

$$m = G_{zr}/E_z; \quad V = 1 - \mu_{r\theta}^2; \quad V_1 = 1 - n\mu_{zr}$$

$$v_2 = \mu_{r\theta} + n\mu_{zr}^2; \quad v_3 = (1 + \mu_{r\theta})(1 - \mu_{r\theta} - 2n\mu_{zr}^2)$$

$$v_4 = \mu_{zr}(1 + \mu_{r\theta})$$

$$F_{TN} = \int_{\Delta} \frac{(a_r + b_r r + C_{rz})(a_s + b_s r + c_{sz})}{r} dr dz$$

$$\frac{1}{G_{zr}} = \frac{4}{E_{zr}^2} - \left(\frac{1}{E_r} + \frac{1}{E_z} - \frac{2\mu_{rz}}{E_r} \right)$$

(2) 附加节点力 (热载荷)

$$\{F\}_{e_0} = 2\pi \int_{\Delta} [B]^T [D] \{e_0\} r dr dz \quad (43)$$

$$\{F_i\}_{e_0} = \frac{\pi R_E E_z}{V_3} T^e \begin{pmatrix} b_i + \frac{2\Delta}{3R_E} (nv_4 \alpha_z + n(v_1 + v_2) \alpha_r) \\ C_i (v \alpha_z + 2nv_4 \alpha_r) \end{pmatrix} \quad (44)$$

(3) 外载荷

$$\text{外压力引起的节点力: } \{F_p\}^e = 2\pi \int [N]^T [p] r dl \quad (45)$$

$$\{F_{pi}\} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} [(3r_i + r_j) P_i + (r_i + r_j) p_j] (z_i - z_j) \\ \frac{\pi}{6} [(3r_i + r_j) p_i + (r_i + r_j) P_j] (r_i - r_j) \end{pmatrix} \quad (46)$$

$$\{F_{pj}\} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} [(r_i + r_j)p_i + (r_i + 3r_j)p_j](z_i - z_j) \\ \frac{\pi}{6} [(r_i + r_j)p_i + (r_i + 3r_j)p_j](r_i - r_j) \end{pmatrix} \quad (47)$$

(4) 总体合成

$$\{K\} = \sum \{k\}^e \quad (48)$$

$$\{F\}_{\cdot o} = \sum \{F\}_{\cdot o}^e \quad (49)$$

$$\{F_p\} = \sum \{F_p\}^e \quad (50)$$

$$\text{按虚功原理, } \{K\}(\delta) = \{F\}_{\cdot o} + \{F_p\} \quad (51)$$

(5) 应变、应力的节点表示

$$\{\varepsilon\}_i^e = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta} \sum C_k V_k \\ \frac{1}{2\Delta} \sum b_k u_k \\ \frac{u_i}{r_i} (r_i \neq 0) \\ \frac{1}{2\Delta} \sum b_k u_k (r_i = 0) \\ \frac{1}{2\Delta} \sum (b_k V_k + C_k u_k) \end{cases} \quad (i = i, j, m) \quad (52)$$

节点应变为所有以该节点为顶点的各单元体在该点应变的算术平均值。

(6) 应力

$$\{\sigma\}_i^e = \{D\}(\{\varepsilon\}_i^e - \{\varepsilon_0\}_i^e) \quad (53)$$

求出每一个以该节点为顶点的单元体在该点的应力, 然后取其算术平均值。进而可确定其主应力及其方向。

四、计算方法与解析解的比较

文献[9]给出均质球加热到等温状态时, 突然投入到一个相当低的低温环境 T_1 中, 当其球表温度恒为 T_1 时, 球体内部的温度和应力分布为

$$T(r, t) = (T_0 - T_1) \frac{2R}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin \frac{n\pi r}{R} e^{-(kn^2\pi^2 t / c\rho R^2)} + T_1 \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \text{平均温度 } \bar{T} &= b(T_0 - T_1) \left(\frac{R}{\pi r} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left(\cos \frac{n\pi r}{R} - \frac{R}{n\pi r} \sin \frac{n\pi r}{R} \right) \times \\ &\times e^{-kn^2\pi^2 t / c\rho R^2} + T_1 \end{aligned} \quad (55)$$

$$\text{径向应力 } \sigma_r(r, t) = \frac{2}{3} \frac{E\alpha}{1-\mu} [2\bar{T}(R, t) + \bar{T}(r, t)] \quad (56)$$

$$\text{切向应力 } \sigma_{\theta}(r, t) = \frac{1}{3} \frac{E\alpha}{1-\mu} (2\bar{T}(R, t) + \bar{T}(r, t) - 3T(r, t)) \quad (57)$$

对设定 $R=100$ 毫米, $E=4 \times 10^5$ 公斤/厘米², $\mu=0.2$, $\alpha=2 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $k=0.02$ 千卡/米·秒· $^\circ\text{C}$, $C=0.25$ 千卡/公斤 $^\circ\text{C}$, $P=4000$ 公斤/米³, 温度 $T_0=1000^\circ\text{C}$ 及 $T_1=0^\circ\text{C}$, 分别采用解析法和本文方法求解, 其结果见表1、2、3。

表1 解析解与本文计算的温度场比较

r/R	t 秒 T $^\circ\text{C}$	5"			20"			40"		
		解析解	本文计算	误差%	解析解	本文计算	误差%	解析解	本文计算	误差%
0.9		467.21	480.05	2.7	195.91	190.30	-2.95	108.23	108.25	0.02
0.8		803.37	799.35	-0.5	400.61	401.85	0.31	228.26	228.50	-0.07
0.7		951.57	939.30	-1.3	587.36	586.60	-0.13	352.52	351.75	-0.22
0.6		992.2	984.8	-0.7	737.83	733.80	-0.55	471.25	469.50	-0.37
0.5		999.18	996.75	-0.2	845.79	839.15	-0.40	577.75	574.90	-0.49
0.4		999.94	999.3	-0.05	915.26	907.50	-0.85	667.12	663.50	-0.54
0.3		999.99	999.80	-0.02	955.58	947.20	-0.88	736.78	731.10	-0.77
0.2		999.99	999.90	-0.01	976.72	970.00	-0.69	785.99	781.20	-0.61
0.1		999.99	999.90	-0.01	986.37	980.90	-0.55	815.10	811.10	-0.49

表2 解析解与本文计算的径向应力场比较

r/R	t 秒 σ_r 公斤/厘米 ²	5"			20"			40"		
		解析解	本文结果	误差%	解析解	本文结果	误差%	解析解	本文结果	误差%
0.9		-1147.16	-1019.5	-11.7	-868.33	-791.8	-8.8	-574.15	-534.10	-6.99
0.8		-1764.87	-1700.3	-3.7	-1655.28	-1574.75	-4.9	-1148.38	-1103.95	-3.9
0.7		-1991.08	-1980.9	-0.51	-2308.9	-2272.9	-1.3	-1696.51	-1648.9	-2.8
0.6		-2046.63	-2075.0	1.4	-2708.1	-2731.7	-2.7	-2195.94	-2147.25	-2.2
0.5		-2055.72	-2113.25	2.8	-3156.45	-3087.4	-2.2	-2629.78	-2629.1	-0.03
0.4		-2056.71	-2122.4	3.19	-3382.71	-3315.4	-2.0	-2987.5	-2924.4	-2.1
0.3		-2056.79	-2122.0	3.17	-3518.5	-3450.0	-1.90	-3264.4	-3170.4	-2.9
0.2		-2056.79	-2117.1	2.93	-3593.63	-3579.3	-0.4	-3360.05	-3352.3	-3.1
0.1		-2056.79	-2111.9	2.68	-3630.15	-3588.80	-1.1	-3576.11	-3498.70	-2.2

表3 解析解与本文计算的切向应力场比较

σ_{θ} 公斤/厘米 ² r/R	5"			20"			40"		
	解析解	本文计算	误差%	解析解	本文计算	误差%	解析解	本文计算	误差%
0.9	2816.52	2906.70	3.2	2904.72	2837.65	-2.3	2030.07	1992.85	-1.8
0.8	-236.45	7680	132.48	1251.12	1232.15	-1.5	1112.93	1087.80	-2.3
0.7	-1605.42	-1360.85	-15.2	-289.47	-256.4	-11.4	148.4	141.9	-4.4
0.6	-1983.9	-1893.35	-4.56	-1545.08	-1470.6	-4.8	-789.18	-774.35	-1.9
0.5	-2049.19	-2047.05	-0.10	-2450.06	-2357.45	-3.8	-1637.26	-1605.0	-2.0
0.4	-2036.28	-2095.0	1.88	-3031.58	-2919.90	-3.0	-2352.13	-2303.9	-2.1
0.3	-2056.77	-2088.33	1.53	-3366.92	-3259.6	-3.2	-2910.26	-2892.0	-0.6
0.2	-2056.79	-2080.6	1.16	-3540.71	-3455.7	-2.4	-3304.57	-3178.3	-3.8
0.1	-2056.79	-2077.3	1.0	-3619.02	-3563.7	-1.5	-3537.62	-3451.8	-2.4

比较表明, 本文计算结果与解析解温度偏差一般不超过1%, 应力偏差一般不超过5%; 靠近外边界, 由于应力计算采用三角形单元, 计算应力为单元平均应力, 对内节点取周围单元的平均值, 与当地值误差较小, 边界节点应力值则仅为单边单元平均值, 自然误差较大, 这就是常说的方法误差和边界失真。另外, 对球体采用有限元只能用折线代替连续球面, 这种图形上的近似也会带来计算误差, 因此, 边界节点偏差稍大, 但一般也不超过10%, 这在工程上已能满足要求, 要减小偏差, 在计算机容量允许条件下, 可以通过加密边界节点来实现。

五、工 程 算 例

曾用本文方法对发动机喷管喉衬进行热结构数值分析。喉衬结构及计算网络, 发动机工作至第七秒时喉衬内部的温度, 轴向应变, 三种应力分布图线见图4~图8。节点K的温度变化曲线见图9。最大轴向应力随时间变化见图10。

分析得到了如下结果: 在该发动机工作期间, 喉衬中最大轴向应力达105.2公斤/厘米², 应变达0.226%, 位置在喉径 d_t 附近, 于开车后3秒左右出现。这表明, 在此处出现轴向断裂的可能性较大, 因为其应力和应变均已接近材料的破坏极限。而在箭头所示的A处, 由于应力集中的缘故, 拉应力超过了材料的强度极限, 出现轴向断裂几乎是不可避免的。

这种结论、与历次地面热试车结果基本相符。

因此我们改进设计, 在A处去除台阶, 然后重新进行数值分析。计算表明轴向应变、应力的峰值趋向减小, 喉衬发生轴向断裂的概率可望降低。这种预测、亦为后来地面试车所证实。

六、结 论

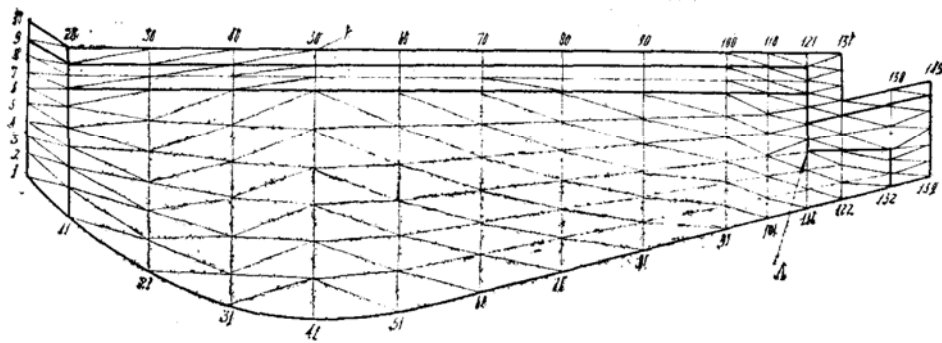


图3 喉衬结构及计算网络

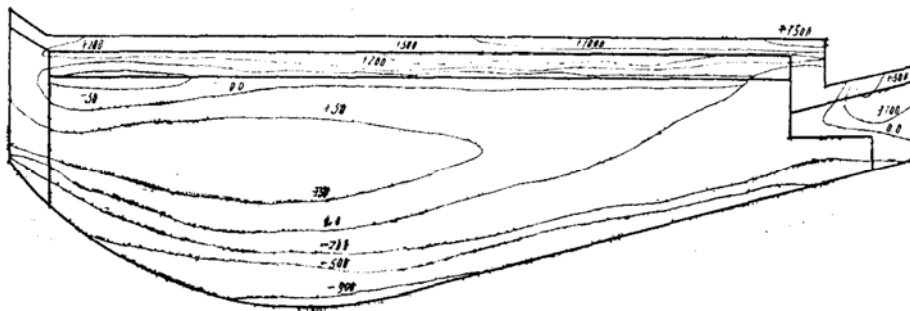


图4 第7秒时喉衬内轴向应力分布 (公斤/厘米²)

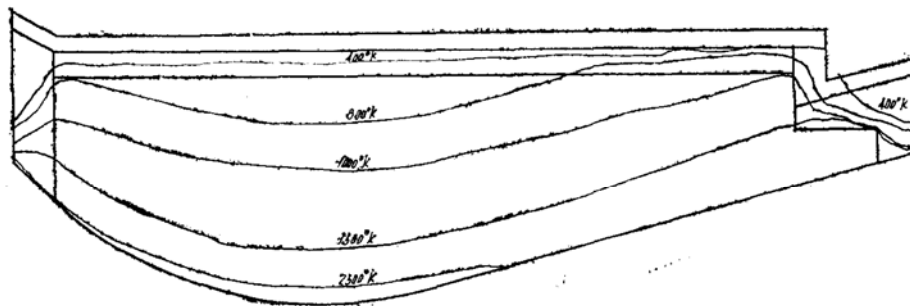


图5 第7秒时喉衬内部温度分布

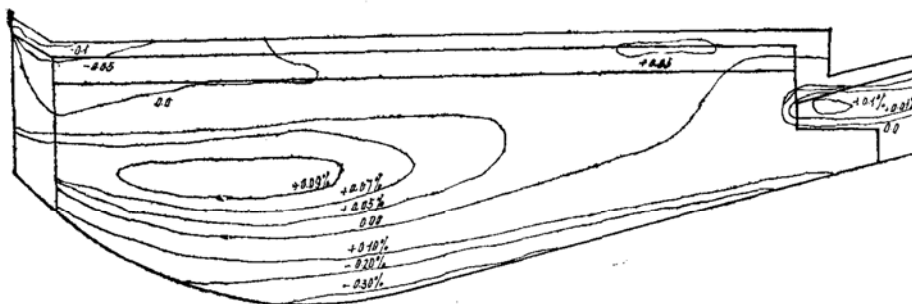


图6 第7秒时喉衬内部应变分布

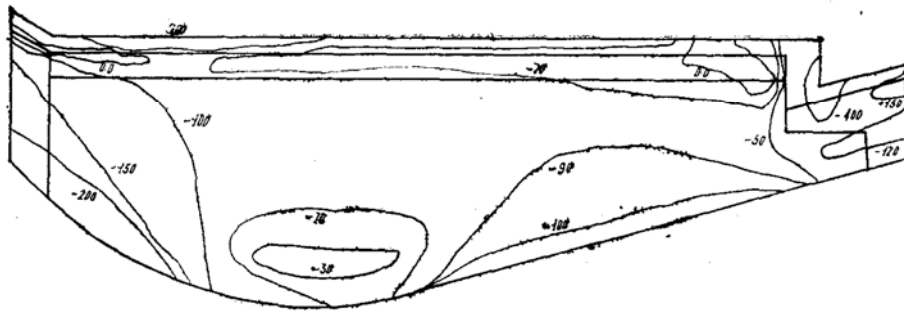


图 7 第 2 秒/时喉衬内部径向应力分布 (公斤/厘米²)

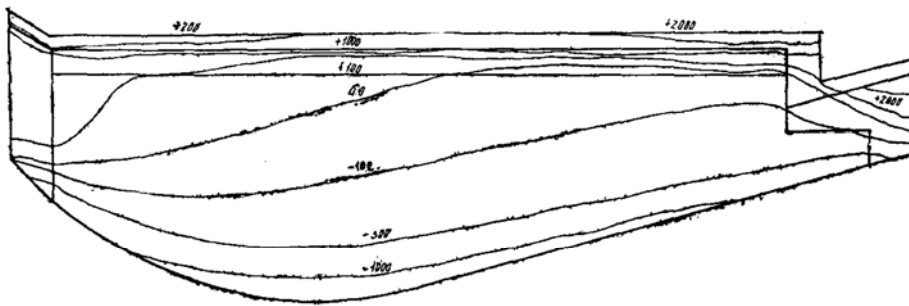


图 8 第 7 秒时喉衬内部切向应力分布 (公斤/厘米²)

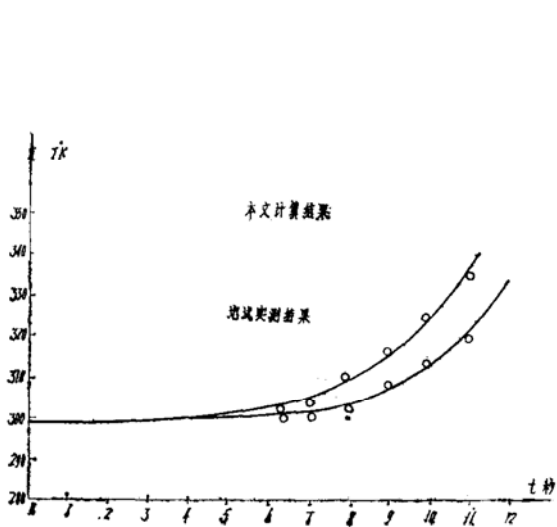


图 9

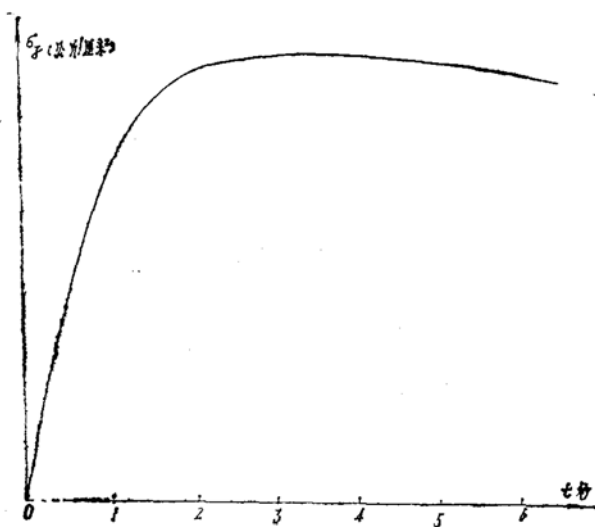


图 10

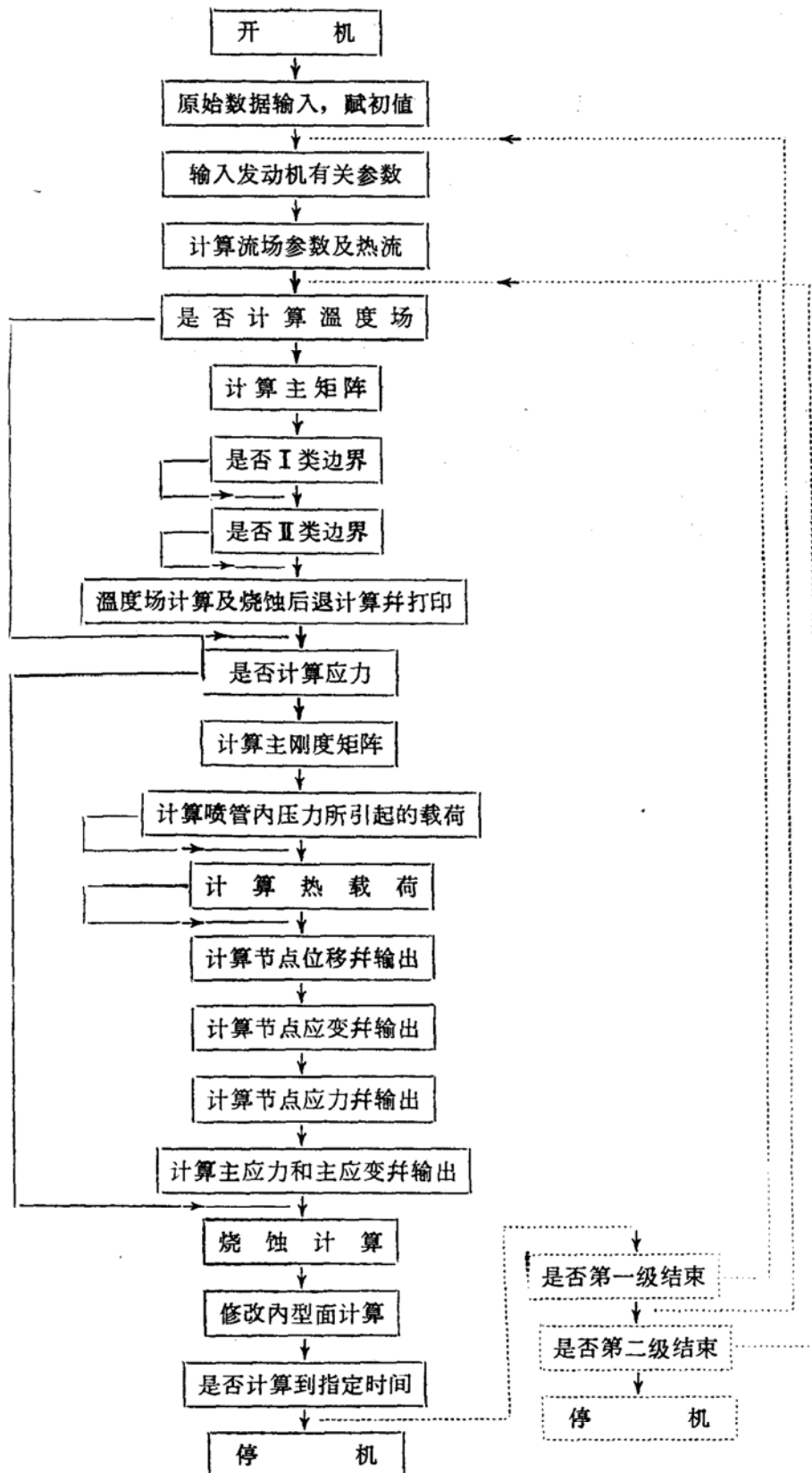


图 11 计算程序框图

采用一元等熵流动、巴兹估算公式和动力学控制的烧蚀模型进行喷管内流场、对流换热和喉衬烧蚀计算,应用变分原理有限元法计算喉衬内部温度场及弹性热应力分布及其随时间的变化,方法是可行的,可得到一定的精度。具体应用于喉衬热结构分析,亦取得了可喜结果。

参 考 文 献

- (1) AD-A018244.
- (2) 齐基威茨O.C.: 结构和连续力学中的有限单元法.
- (3) 钱伟长: 变分原理及有限元讲义.
- (4) 复旦大学编写: 空间有限元法及大型线性方程组的解法.
- (5) 三本木茂夫: 有限单元法结构分析及程序.
- (6) 华东水利学院: 弹性力学问题的有限单元法.
- (7) 刘连元: 轴对称非定常温度和连续介质弹性热应力有限单元法及程序(会议资料)
- (8) 姜贵庆、吴景福: 石墨喉衬热化学烧蚀计算. 推进技术 (84.3)
- (9) 帕尔摩斯H.: 非定常热应力.