

时间相关法计算喷管跨音速流动

方 丁 酉

摘 要

本文用时间相关法完成了定常、无粘跨音速喷管流场的计算,内部点参数用Mac Cormack差分格式计算、壁边界点参数用简化了的特征边界条件计算,轴上点参数用反射原理计算。计算表明:计算是收敛的,计算结果与实验数据符合良好。

定常、无粘、跨音速喷管流动的控制方程是混合型的(即在亚音速区域是椭圆型,而在超音速区是双曲型的),给数值求解带来很大的困难。为了克服这一困难,广泛采用时间相关法^[1-3],即认为定常流动方程的解是相应的非定常流方程的解在时间趋于无穷时的渐近解。因为非定常流的控制方程不论在亚音速区,还是在超音速区域,都是双曲型的,可以用统一的方法来求解,而且易于求解;另一方面,它可适用于形状比较复杂的喷管。

本文首先阐述了时间相关法的计算方法,然后列出算例喷管的计算结果。通过与实验数据的比较,证明计算是符合实际的。

一、控制方程

假设喷管流动是无粘、绝热、非定常的轴对称流动,则无因次化的控制方程为:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + H = 0 \quad (1)$$

式中

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ n \\ e \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho} + p \\ \frac{mn}{\rho} \\ \frac{(e+p)m}{\rho} \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} n \\ \frac{mn}{\rho} \\ \frac{n^2}{\rho} + p \\ \frac{(e+p)n}{\rho} \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} \frac{n}{y} \\ \frac{mn}{y\rho} \\ \frac{n^2}{y\rho} \\ \frac{(e+p)n}{y\rho} \end{pmatrix}$$

式中 p ——无因次压力; ρ ——无因次密度; m ——无因次轴向动量, $m = \rho u$; n ——无因次径向动量, $n = \rho v$; u ——无因次轴向速度; v ——无因次径向速度; e ——无因次单位体积能量, $e = p/(\gamma - 1) + \rho(u^2 + v^2)/2$ 。

无因次化所采用的参考压力、密度和温度是喷管入口处气体的滞止压力 P_0 、滞止密度 ρ_0 和滞止温度 T_0 ; 参考距离是喷喉半径 r_t ; 参考速度是 $\sqrt{P_0/\rho_0}$; 参考时间是 $r_t/\sqrt{P_0/\rho_0}$ 。用这些参考参数,无因次化前后的控制方程形式相同。

二、坐标变换和计算平面上的控制方程

为了用有限差分方法数值解控制方程,总是希望把物理平面上的形状复杂的计算域变换为计算平面上的矩形域。为了使计算适用于任何喷管形状,采用边界拟合曲线坐标系统^[4],其变换函数为:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y)\end{aligned}$$

考虑到流动参数在喉部区变化最剧烈,在该区节点分布应该密一些,而其它地方可稀一些,壁上节点分布采用下面的关系式计算:

$$\xi = \xi_N (\text{sh}^{-1}(AX) - \text{sh}^{-1}(AX_0)) / (\text{sh}^{-1}(AX_N) - \text{sh}^{-1}(AX_0)) \quad (2)$$

式中 X_N 和 X_0 是喷管壁上出口和入口边界处的 X 坐标; ξ_N 是与 X_N 相对应的在计算平面上的坐标,即 $X = X_N$ 时 $\xi = \xi_N$ 。由式可见,当 $X = X_0$ 时 $\xi = 0$ 。 A 是调节参数,根据节点在壁边界上分布的稀疏情况进行选取, A 越大,分布在喉部区的节点越多。

为了在计算平面上对控制方程数值求解,还必须把方程变换到计算平面上。变换链为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial X} &= \frac{\partial \xi}{\partial X} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial X} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial Y} &= \frac{\partial \xi}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial \eta}\end{aligned}$$

经变换后的控制方程为:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \eta} + \tilde{H} = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\text{式中 } \tilde{U} &= JU; \tilde{F} = y_\eta F - x_\eta G; \tilde{G} = -y_\xi F + x_\xi G \\ \tilde{H} &= JH; J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi\end{aligned}$$

三、内部点的差分格式

用时间相关法计算跨音速喷管流场需要较长的计算机时,选择有效的差分格式是提高计算效率的关键。计算表明,二步Mac Cormack显格式^[6]是一个效率较高、程序编制也较简单的格式。本计算采用这个格式,其格式为:

第一步预报:

$$\begin{aligned}\overline{U_{i,j}^{n+1}} &= U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{J_{i,j}} (\tilde{F}_{i,j}^n - \tilde{F}_{i-1,j}^n) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{J_{i,j}} (\tilde{G}_{i,j}^n - \tilde{G}_{i,j-1}^n) \\ &\quad - \Delta t \cdot H_{i,j}^n + S_{i,j}^n\end{aligned} \quad (4a)$$

第二步校正:

$$\begin{aligned}
U_{i,j}^{n+1} = & \frac{1}{2} \left[U_{i,j}^n + \overline{U_{i,j}^{n+1}} - \frac{\Delta t}{J_{i,j}} (\widetilde{F_{i,j}^{n+1}} - \widetilde{F_{i,j}^n}) - \frac{\Delta t}{J_{i,j}} (\widetilde{G_{i,j}^{n+1}} - \widetilde{G_{i,j}^n}) \right. \\
& \left. - \Delta t \cdot H_{i,j}^{n+1} \right] + S_{i,j}^{n+1}
\end{aligned} \quad (4b)$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{F_{i,j}^n} &= \widetilde{F}(U_{i,j}^n) & \widetilde{F_{i,j}^{n+1}} &= \widetilde{F}(\overline{U_{i,j}^{n+1}}) \\
\widetilde{G_{i,j}^n} &= \widetilde{G}(U_{i,j}^n) & \widetilde{G_{i,j}^{n+1}} &= \widetilde{G}(\overline{U_{i,j}^{n+1}}) \\
H_{i,j}^n &= H(U_{i,j}^n) & H_{i,j}^{n+1} &= H(\overline{U_{i,j}^{n+1}})
\end{aligned}$$

式中 $S_{i,j}^n$ 和 $S_{i,j}^{n+1}$ 是人工粘性项。计算表明, 当跨音速区没有激波存在时, 人工粘性项并不是非要不可的。式中下标 (i, j) 表示对 ξ, η 的标记, 上标 $n, n+1$ 和 $n+1$ 表示时间层。

四、边界点的计算

1. 入口边界

喷管入口边界是以喷管壁入口点的切线与轴线的交点为圆心, 通过壁入口点的圆弧。因此, 假设入口边界上的流动为径向流动, 气体的流动角 θ 是已知的, 且有

$$\operatorname{tg} \theta = v_i / u_i \quad (5)$$

式中下标 i 表示入口边界上的参数。

由喷管入口边界上气体流动参数与滞止参数有

$$T_i + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{u_i^2 + v_i^2}{2} = 1 \quad (6)$$

$$\text{和} \quad T_i = p_i \frac{\gamma-1}{\gamma} \quad (7)$$

式中 γ ——气体比热比。

下面用简化了的特征线方法来建立第四个方程。

如果在 $\eta = \text{常数}$ 的平面内求解控制方程, 则方程变为一维不定常流动方程, 其特征方程为

$$\left(\frac{dt}{d\xi} \right)_0 = \lambda_0 = \frac{J}{u y_\eta - v x_\eta} \quad (\text{重根})$$

$$\left(\frac{dt}{d\xi} \right)_\pm = \lambda_\pm = \frac{J}{(u y_\eta - v x_\eta) \pm a \sqrt{y_\eta^2 + x_\eta^2}}$$

因为在入口边界上有 $J > 0$ 和 $u y_\eta - v x_\eta > 0$, 因此, 只有 λ_- 特征线处在流场中, 只有沿 λ_- 建立的相容方程才是有意义的。沿 λ_- 的相容方程为:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\lambda_-} (u_\xi + \lambda_- u_t) - \frac{x_\eta}{y_\eta \lambda_-} (v_\xi + \lambda_- v_t) \\
& - \frac{\sqrt{y_\eta^2 + x_\eta^2}}{\rho a y_\eta \lambda_-} (p_\xi + \lambda_- p_t) - \frac{1}{J} \left[(y_\xi u - x_\xi v) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\dot{y}_\xi}{y_\eta} a \sqrt{y_\eta^2 + x_\eta^2} \left] u_\eta + \frac{1}{J} \left[\frac{x_\eta}{y_\eta} (y_\xi u - x_\xi v) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{x_\xi}{y_\eta} a \sqrt{y_\eta^2 + x_\eta^2} \right] v_\eta - \frac{1}{J} \left[\frac{y_\xi y_\eta + x_\xi x_\eta}{\rho y_\eta} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\sqrt{y_\eta^2 + x_\eta^2}}{\rho a y_\eta} (u y_\xi - v x_\xi) \right] p_\eta - \frac{\sqrt{y_\eta^2 + x_\eta^2}}{y_\eta} \frac{a v}{y} = 0 \quad (8)
\end{aligned}$$

该式中省略了下标*i*。由方程(5)~(8)即可求得入口边界上的流动参数。但相容方程(8)不适用于入口边界与轴线的交点,因为在该点有 $\frac{v}{y} = \frac{0}{0}$ 。因此,对入口边界轴上点的计算要用洛必大法则作特殊的处理。

2. 轴线边界

在轴线下补充一层虚拟的节点,轴上点参数可用内部点差分格式来计算。但要注意,控制方程在轴上点也存在 $\frac{v}{y} = \frac{0}{0}$ 的不定式问题。因此,也要采用洛必大法则对控制方程进行处理后再进行计算。

因为轴线边界是直的对称轴线,可用反射原理来确定虚拟节点上的参数,即

$$\left. \begin{aligned} v_{i,-1} &= -v_{i,2} & u_{i,-1} &= u_{i,2} \\ \rho_{i,-1} &= \rho_{i,2} & e_{i,-1} &= e_{i,2} \\ p_{i,-1} &= p_{i,2} & y_{i,-1} &= -y_{i,2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

3. 喷管壁边界

喷管壁边界是一条流线,壁面法线方向上的速度分量为零。设壁面的曲线方程为 $y_W = y_W(x)$,则有

$$y'_W(x) = \frac{v_W}{u_W} \quad (10)$$

式中下标W表示壁上节点的参数。

为了计算壁上节点参数还需要建立三个方程,下面用简化了的特征线方法来建立,它的思路与入口边界的处理一样。

在 $\xi = \text{常数}$ 的平面内把方程看成一维流动方程,经推导得到计算平面内壁上节点的特征方程为:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dt}{d\eta} \right)_0 &= \lambda_0 = \frac{J}{-y_\xi u + x_\xi v} \\
\left(\frac{dt}{d\eta} \right)_\pm &= \lambda_\pm = \frac{J}{(-y_\xi u + x_\xi v) \pm a \sqrt{y_\xi^2 + x_\xi^2}}
\end{aligned}$$

当坐标变换保证 $y'_W(x) < 0$ 时 $(x_\eta)_W > 0$ 和 $y'_W(x) > 0$, $(x_\eta)_W < 0$,则 λ_- 特征线在流场外边,而 λ_0 和 λ_+ 特征线在流场内。因此,沿 λ_0 和 λ_+ 的相容方程可用于壁边界节点参数的计算。沿 λ_+ 的相容方程为:

$$\frac{y_\xi}{x_\xi} u_t - v_t - \frac{\sqrt{y_\xi^2 + x_\xi^2}}{x_\xi \rho a} p_t = -\frac{1}{\lambda_+} \left(\frac{y_\xi}{x_\xi} u_\eta - v_\eta \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\sqrt{y_\xi^2 + x_\xi^2}}{x_\xi \rho_a} p_\eta) - \frac{1}{J} \left\{ \left[\frac{y_\xi}{x_\xi} (y_\eta u - x_\eta v) \right. \right. \\
& - \frac{y_\eta}{x_\xi} a \sqrt{y_\xi^2 + x_\xi^2} \left. \right] u_\xi + \left[(y_\eta u - x_\eta v) - \frac{x_\eta}{x_\xi} a \sqrt{y_\xi^2 + x_\xi^2} \right] v_\xi \\
& - \frac{1}{\rho_a} \left[\frac{a(y_\xi y_\eta + x_\xi x_\eta)}{x_\xi} - \frac{y_\eta u - x_\eta v}{x_\xi} \sqrt{y_\xi^2 + x_\xi^2} \right] p_\xi \left. \right\} \\
& + \frac{\sqrt{y_\xi^2 + x_\xi^2}}{x_\xi} \frac{av}{y}
\end{aligned} \quad (11)$$

沿 λ_0 的相容方程为:

$$\rho_t - \frac{1}{a^2} p_t = -\frac{1}{\lambda_0} \left(\rho_\eta - \frac{1}{a^2} p_\eta \right) + \left(\frac{1}{a^2} p_\xi - \rho_\xi \right) \cdot \frac{y_\eta u - x_\eta v}{J} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
u_t + \frac{y_\xi}{x_\xi} v_t &= -\frac{1}{\lambda_0} \left(u_\eta + \frac{y_\xi}{x_\xi} v_\eta \right) - \frac{y_\eta u - x_\eta v}{J} \cdot \\
& \left(u_\xi + \frac{y_\xi}{x_\xi} v_\xi \right) + \frac{x_\eta y_\xi - x_\xi y_\eta}{\rho x_\xi J} p_\xi
\end{aligned} \quad (13)$$

由方程(10)–(13)用特征差分格式即可求得壁边界上节点的参数。

4. 出口边界

喷管跨音速流场的出口边界处在超音速区域, 它的计算误差不能往上游传播。因此, 计算中采用三点外插公式来求得出出口边界点上的参数。

五、算 例

该喷管具有 45° 收敛半角和 15° 扩散半角, 喉部由一圆弧连接, 其壁曲率半径与喉部半径之比为 0.625, 是一个具有小喉部曲率半径的喷管。为了和实验数据比较, 流经喷管的气体是空气, 其比热比为 1.4。

坐标变换后得到的物理平面上的节点分布如图 1 所示。

计算中取某截面 i 上所有节点的参数 U 达到

$$|U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n| \leq 10^{-4} \quad (j=1, j_{\max})$$

时作为收敛判断准则, 计算表明, 在计算过程中总是高马赫数区域先达到收敛, 而低马赫数区域收敛较慢。为了保证整个流场收敛, 本计算取第 5 截面的参数来检验。

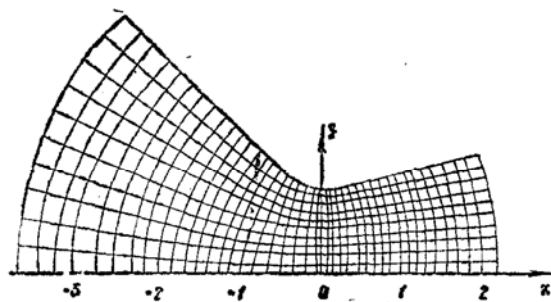


图 1 小曲率半径喷管坐标网格节点

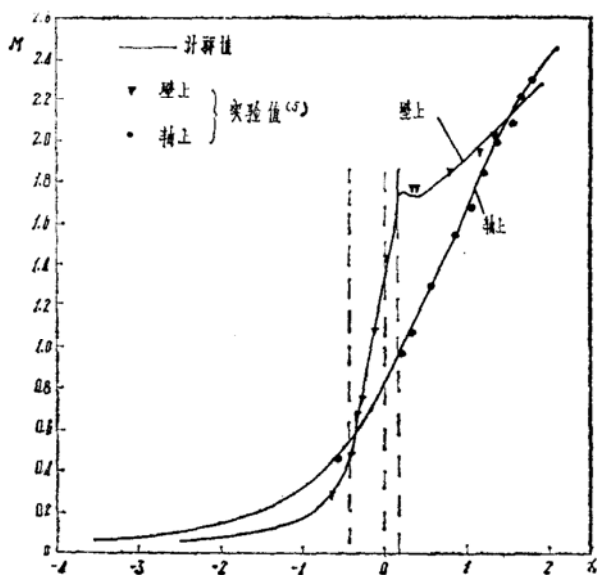


图2 壁上和轴上气体马赫数的分布

图2示出了壁上和轴上气体马赫数沿喷管轴向的分布。图3示出了等马赫线。图4示出了壁上和轴上无因次气体压力的分布。

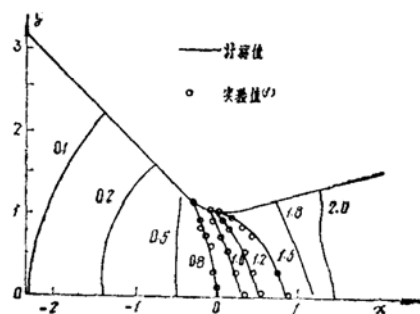


图3 小曲率半径喷管中的等马赫线

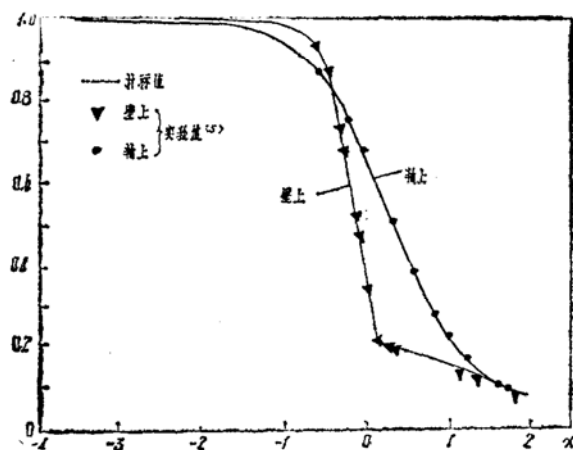


图4 壁上和轴上无因次气体压力的分布

由图可见，在喷管几何喉部轴上马赫数为0.81，壁上为1.35，轴上无因次压力为0.64，壁上为0.35。图2—图4上还标出了实验数据^[5]。表1列出了一些参数的计算值与实验测得的值。表中的喷管收缩因子是指喷管入口滞止压力相同条件下通过喉部的流量与一维流动通过喉部的流量之比，由图及表中计算结果与实验数据的比较可见，这两者是相当符合的。

表1 某些实验结果与计算结果

	音速线位置(无因次x)		喷喉收缩因子
	轴上	壁上	
实验结果	0.25	-0.13— -0.14	0.935
计算结果	0.24	-0.16	0.9828

六、结 论

本计算方法和程序用于喷管跨音速流场的计算是收敛的。通过计算结果和实验数据的比较,说明本计算结果与实际符合较好。

参 考 文 献

1. Serra R.A., AIAAJ, Vol.10, №5, 1972.
2. Cline M.C., NASA TM X-71918, N74-17013.
3. Chang I.S., AIAA J, Vol.18, Dec.1980.
4. Thompson J.F., Thames F.C., and Mertin O.W., NASA CCR 2729, July 1977.
5. Cuffel R.F., Back L.H., and Masnier P.F., AIAAJ, Vol.7, №7, July 1969.
6. Mac Cormack R.W., AIAA Paper 69-354, May 1969.