

连接处增加一柔性环节,即在强度允许情况下,加工一沟槽(见图12),以此缓冲 椭球封头端部的内缩量对 O 型圈所在直段的影响,从而提高了密封可靠性。

五、结 束 语

由薄膜理论引出的公式,可以求解椭球壳的应力和端、顶部的径向位移。计算表明椭球壳的应力和位移与椭球比有关。当椭球比一定时,椭球壳的应力在顶点和端部最大,在强度计算时,应以这些点的应力为依据。

从强度观点考虑,以椭球比为 1 最合理,从限制端部位移考虑,椭球比应小于 1.3。但是考虑到利用空间及制造工艺等因素,通常椭球比的选用范围为 1.8~2.5。

在可拆卸型封头中,由于强度和结构等原因,封头椭球体与封头座存在不同程度的曲率、壁厚、载荷甚至切线不连续等情况,因而造成弯曲效应使封头和筒体在连接处的位移不协调。为了提高密封和连接部件的工作可靠性,应在结构设计中充分注意到弯曲效应的衰减性。在某些结构安排不得已的情况下,可以采用补强或限位等措施,以限制两者的变形。

由于椭球封头的结构型式可以是多种多样的,且椭球壳与封头座连接的弯曲效应比较复杂,限于笔者的水平,本文给出的计算公式和结论有一定程度的近似性,仅供固体火箭发动机的结构设计人员参考。

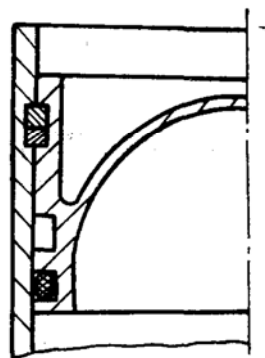


图12 柔性环节

参 考 文 献

- (1) 清华大学“薄壳理论讲义”
- (2) 北京航空学院“固体火箭发动机设计”
- (3) 北京工业学院“固体火箭发动机设计”1980国防工业出版社
- (4) 国防科技大学“固体火箭发动机设计基础”1978
- (5) 导弹结构强度计算手册编写组《导弹结构强度计算手册》1978国防工业出版社
- (6) 范钦珊“压力容器的应力分析与强度设计”1979原子能出版社
- (7) 推进技术编辑部《国外导弹发动机手册》1982
- (8) 北京航空学院《固体火箭发动机构造图册》1976
- (9) Лизин В.Т等: Проектирование тонкостенных конструкций, Москва 1976.
- (10) Гузь А.Н等: Прочность конструкций РДТТ, Москва 1980
- (11) Roark R.J., Formulas for stress and strain 1975
- (12) 野原石松,《压力容器》,共立出版株式会社,1970

喷管温度场计算的加权余数有限元方法

姜贵庆 王淑华

一、引言

喷管温度场计算是固体火箭发动机喷管设计中遇到的一个重要问题。利用差分法计算温度场已有很多文献报导^[3]，本文提供一个加权余数有限元法计算喷管的温度场，其突出的优点是能与热结构计算程序联用，组成热分析和热结构的统一程序，因为加权余数有限元与变分原理有限元在节点网格的划分，有限元几何参数的计算，变带宽的一维储存和代数方程组的求解都有相同之处。为了说明方法的精度和可靠性，本文给出了有限元计算与解析解的比较，有限元计算与地面试验结果的比较，这些比较表明：本文提供的方法是可靠的，可供设计采用。

二、加权余数有限元计算原理

为了阐明加权余数法的计算原理，我们来考虑这样一个问题：若 u 为定义在 D 域上的变量， D 域的边界为 Σ ，它满足以下的微分方程： $\alpha(u) = f$ (1)

其中 α 为微分算子， f 为变量 u 的已知函数。

用 $\tilde{u}$ 近似表示未知的 u ，且为：

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^m N_i C_i \quad (2)$$

式中 N_i 为假定的函数， C_i 为未知参数。这 m 个函数 N_i 通常选择使其满足整个边界条件。

将 $\tilde{u}$ 代入(1)，并不满足方程，即：

$$\alpha(\tilde{u}) - f \neq 0 \quad (3)$$

如果我们引进 R 称为余数或误差，则有：

$$\alpha(\tilde{u}) - f = R \quad (4)$$

加权余数法是在整个求解区域，通过使误差 R 为微小的方法来定出 m 个未知量 C_i 。我们选择 m 个线性无关的加权函数 W_i ，并且认为：若

$$\int_D [\alpha(\tilde{u}) - f] W_i dD = \int_D R W_i dD = 0 \quad (5)$$

$i = 1, 2, \dots, m$

$\tilde{u}$ 即逼近 u ，这样就可由(5)式确定 m 个未知量 C_i 的代数方程组或常微分方程组。可以证明，对于许多线性问题，甚至某些非线性问题，当 $m \rightarrow \infty$ 时， $\tilde{u} \rightarrow u$ 。

上述是加权余数法一般原理, 引进有限元插值函数, 对方程 (4) 加权积分不是求解区域 D , 而是求所求节点 i 的邻域 D_i , D_i 是 D 的子域, 即,

$$\int_{D_i} [\alpha(\tilde{u}) - f]_i W_i dA = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (6)$$

式中 W_i 为权函数。

由方程 (6) 亦可导出确定 m 个未知数的代数方程组或常微分方程组, 这就是加权余数有限元方法导出的有限元公式。

有限元离散, 加权积分和基本积分公式。

在所研究的 D 域内进行离散, 取三角形元素, 任取一个离散点 i , 与 i 点有关的元素有 n 个, 组成子域 D_i , 其元素编号分别为 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 。假定其相应面积分别为 $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}$, $A_i = \sum_{K=1}^n A_{iK}$, 子域 D_i 中任意一个三角形元素 e_K , 其节点编号为 i, j, m (逆时针方向)。

$$\text{引进 } f = T, u, v \quad (7)$$

T 为温度, u, v 分别为轴向和径向位移。

设 f 为节点坐标的线性函数, 即:

$$f = N_i f_i + N_j f_j + N_m f_m \quad (8)$$

其中 N_i, N_j, N_m 为型函数, 其表达式为:

$$N_s = (a_s + b_s Z + c_s r) / 2A_{sK} \quad S = i, j, m \quad (9)$$

$$A_{iK} = \frac{1}{2} (b_i c_j + b_j c_i) \Omega_{iK} \quad (10)$$

Ω_{iK} 为与节点 i 有关的第 k 个元素的区域。

$$a_i = Z_j r_m - r_j Z_m \quad (11)$$

$$b_j = r_j - r_m \quad (12)$$

$$c_i = Z_m - Z_j \quad (13)$$

(8) 式的偏导数有以下公式:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = N_i \frac{df_i}{dt} + N_j \frac{df_j}{dt} + N_m \frac{df_m}{dt} \quad (14)$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial N_i}{\partial r} f_i + \frac{\partial N_j}{\partial r} f_j + \frac{\partial N_m}{\partial r} f_m \quad (15)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial N_i}{\partial z} f_i + \frac{\partial N_j}{\partial z} f_j + \frac{\partial N_m}{\partial z} f_m \quad (16)$$

对 (14), (15), (16) 加权积分, 权函数取 N_i 可得以下基本积分公式:

$$\iint_{D_i} f_i r N_i dz dr = \sum_{K=1}^n (f_i)_t (B_i)_{\Omega_{iK}} \cdot A_{iK} \quad (17)$$

$$\iint_{\Omega_i} f_z r N_i dz dr = \sum_{K=1}^n \{f_2 B_1\}_{\Omega_{iK}} \cdot A_{iK} \quad (18)$$

$$\iint_{\Omega_i} \mathbf{f}_r \cdot \mathbf{r} N_j \, d\mathbf{z} d\mathbf{r} = \sum_{K=1}^n \{\mathbf{f}_r \mathbf{B}_1\}_{\Omega_{iK}} \cdot \mathbf{A}_{iK} \quad (19)$$

$$\int_{\rho_i} f N_i dz dr = \sum_{K=1}^n \left(\frac{2f_i + f_j + f_m}{12} \right)_{\rho_{iK}} \cdot A_{iK} \quad (20)$$

其中

$$f_2 = \frac{b_i f_i + b_j f_j + b_m f_m}{2A_{iK}}$$

$$f_r = \frac{c_i f_i + c_j f_j + c_m f_m}{2A_{ijk}}$$

$$B_1 = \frac{2r_i + r_j + r_m}{12}$$

三、温度场计算

1. 基本方程

在柱坐标系下轴对称热传导方程为:

$$\rho_{\text{cp}} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mathbf{k}_r \cdot r \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathbf{k}_z \cdot r \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z} \right) \quad (21)$$

其中 k_r , k_z 分别为沿 r 和 z 向的导热系数。

2. 有限元计算公式

对 (21) 进行加权积分, 积分区域为 i 点的邻域 Ω_i 。

$$\int_{\Omega_i} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} N_i r dr dz = \int_{\Omega_i} N_i \frac{\partial}{\partial r} \left(k_r \cdot r \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr dz + \int_{\Omega_i} N_i \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \cdot r \frac{\partial T}{\partial z} \right) dr dz \quad (22)$$

$$\text{其中 } (I) = \sum_{k=1}^n \iint \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} N_i r dr dz = \sum_{k=1}^n \rho c_p \frac{2r_i + r_j + r_m}{12} \frac{dT_i}{dt} A_{ik} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} (I) &= \sum_{K=1}^n \iint_{\Omega_{iK}} N_i \frac{\partial}{\partial r} \left(k_r r \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr dz = \sum_{K=1}^n \iint_{\Omega_{iK}} \frac{\partial}{\partial r} \left(N_i k_r \cdot r \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr dz \\ &- \sum_{K=1}^n \iint_{\Omega_{iK}} k_r \cdot r \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial N_i}{\partial r} dr dz = \sum_{K=1}^n \iint_{\Omega_{iK}} \frac{\partial}{\partial r} \left(N_i k_r \cdot r \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr dz \\ &- \sum_{K=1}^n k_r r_b \frac{c_i}{2} \frac{C_i T_i + C_j T_j + C_m T_m}{2A_{iK}} \end{aligned} \quad (24)$$

同理

$$(I) = \sum_{K=1}^n \iint_{\Omega_{IK}} \frac{\partial}{\partial z} \left(N_i k_z r \frac{\partial T}{\partial z} \right) dr dz - \sum_{K=1}^n k_z r_b \frac{b_i}{2} \frac{b_i T_i + b_j T_j + b_m T_m}{2 A_{IK}} \quad (25)$$

利用格林公式

$$\begin{aligned} & \sum_{K=1}^n \iint_{\Omega_{iK}} \frac{\partial}{\partial r} \left(N_i k_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr dz + \sum_{K=1}^n \iint_{\Omega_{iK}} \frac{\partial}{\partial z} \left(N_i k_z r \frac{\partial T}{\partial z} \right) dr dz \\ &= \sum_{K=1}^n \oint_s N_i r q_n ds \end{aligned} \quad (26)$$

对于内点:

$$\sum_{K=1}^n \oint_s N_i r q_n ds = 0 \quad (27)$$

对于边界点:

$$\begin{aligned} \sum_{K=1}^n \oint_s N_i r q_n ds = & - \{ ((3r_i q_{n,i} + r_{i+1} q_{n,i+1})/4 + r_i q_{n,i}) s_i \\ & + ((3r_i q_{n,i} + r_{i-1} q_{n,i-1})/4 + r_i q_{n,i}) s_{i-1} \} \end{aligned} \quad (28)$$

上式中 $q_{n,i}$, $q_{n,i-1}$, $q_{n,i+1}$ 分别为边界节点 i , 和相邻节点 $i-1$, $i+1$ 的法向热流; s_i 与 s_{i-1} 分别为节点 i 和 $i+1$, i 和 $i-1$ 之间的边长。公式 (23)~(28) 代入 (22), 可得确定温度场的有限元计算公式。

对于内点:

$$\begin{aligned} \frac{dT_i}{dt} = & - \left\{ \sum_{K=1}^n \left[k_r r_b \frac{c_i}{2} \frac{(C_i T_i + C_j T_j + C_m T_m)}{2A_{iK}} \right. \right. \\ & \left. \left. + k_z r_b \frac{b_i}{2} \frac{b_i T_i + b_j T_j + b_m T_m}{2A_{iK}} \right]_{\Omega_{iK}} \right\} / \sum_{K=1}^n (\rho C_p B_i)_{\Omega_{iK}} A_{iK} \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$r_b = \frac{r_i + r_j + r_m}{3}$$

对于具有热交换的边界节点:

$$\begin{aligned} \frac{dT_i}{dt} = & - \left\{ \sum_{K=1}^n \left[k_r r_b \frac{c_i}{2} \frac{C_i T_i + C_j T_j + C_m T_m}{2A_{iK}} \right. \right. \\ & \left. \left. + k_z r_b \frac{b_i}{2} \frac{b_i T_i + b_j T_j + b_m T_m}{2A_{iK}} \right]_{\Omega_{iK}} - ((3r_i q_{n,i} + r_{i+1} q_{n,i+1})/4 \right. \\ & \left. + r_i q_{n,i}) s_i - ((3r_i q_{n,i} + r_{i-1} q_{n,i-1})/4 \right. \\ & \left. + r_i q_{n,i}) s_{i-1} \right\} / \sum_{K=1}^n (\rho C_p B_i)_{\Omega_{iK}} A_{iK} \end{aligned} \quad (30)$$

四、本文计算方法与解析解、地面试验结果比较

参考[1], 分别利用本文计算方法和解析解计算匀质半球的温度。在给定的材料力学性能参数和初始温度 T_0 、壁温 T_w 条件下, 用本文方法计算结果和解析解结果比较由表 1 给出。两者计算误差均在 0.5%~1.0% 之间。

表1 解析解与本文计算结果比较

$\begin{matrix} t \\ \text{秒} \\ (R-r)/R \\ T^{\circ}\text{C} \end{matrix}$	5"		20"		40"	
	解析解	本文计算	解析解	本文计算	解析解	本文计算
0.9	467.21	469.6	195.91	197.08	108.23	109.27
0.8	803.37	791.5	400.61	400.04	228.66	229.47
0.7	951.57	932.5	587.36	584.13	352.52	352.86
0.6	992.20	982.4	737.83	731.11	471.25	470.31
0.5	999.78	996.4	845.79	840.60	577.75	579.70
0.4	999.94	999.3	915.26	907.50	667.12	665.98
0.3	999.99	999.8	955.58	948.42	736.78	735.20
0.2	999.99	999.9	976.72	970.22	785.99	783.31
0.1	999.99	999.9	981.37	980.40	815.10	812.53

为了验证计算方法的可靠性,还作了一些地面试验,参考〔2〕给出了本文计算方法与地面试验结果的比较。试验模型为KS-9石墨半球,分别在电弧加热条件下和燃气流加热条件下进行试验,测定半球内部温度分布。下面分别介绍两种情况下的测量结果。

1. 石墨半球在电弧加热条件下的温度分布

利用电弧加热对KS-9石墨半球加热,测定其内部温度变化。半球 $R=26$ 毫米,测量点为半球轴线中心点,试验状态参数为:

驻点焓=4000大卡/公斤

驻点冷壁热流=1160大卡/米²·秒

驻点压力=0.8大气压

测量结果与计算结果的比较由图1所示, D_1 、 D_2 分别为试验模型标号。

2. 石墨半球在燃气流条件下的温度分布

在燃气流条件下对KS-9石墨半球进行加热,测定其内部温度分布。半球 $R=30$ 毫米,试验模型测量点位置如图2所示。在特定的加热条件下,测量其内部温度,测量值与计算值结果比较由图3所示。

由图1、图3可以看出,在确定的试验状态下,计算值与测量值符合得很好,由此可以认为,本文所提供的温度场的计算方法在工程上是完全可应用的。

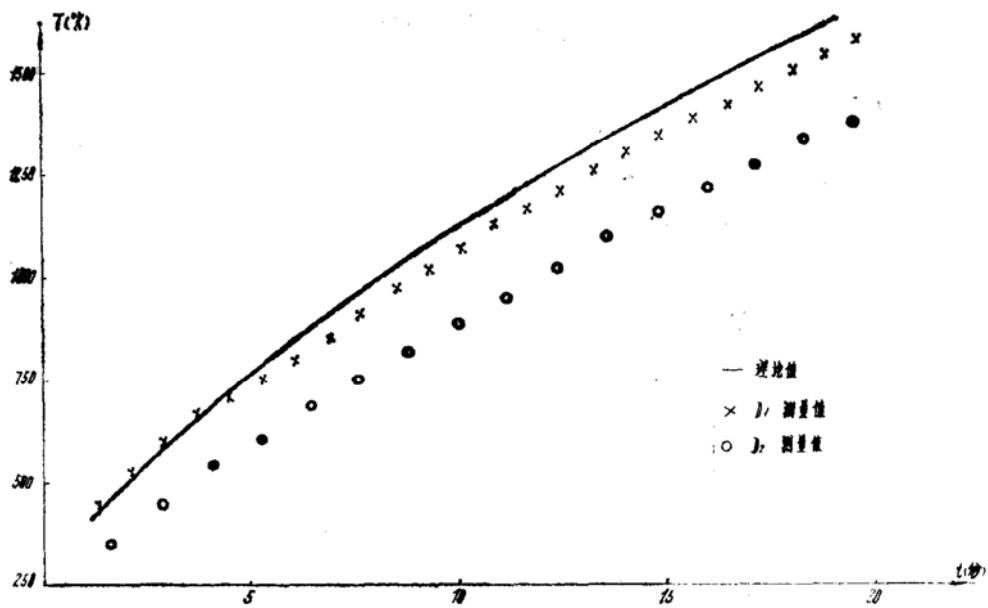


图1 石墨半球内部温度计算值与实验结果比较

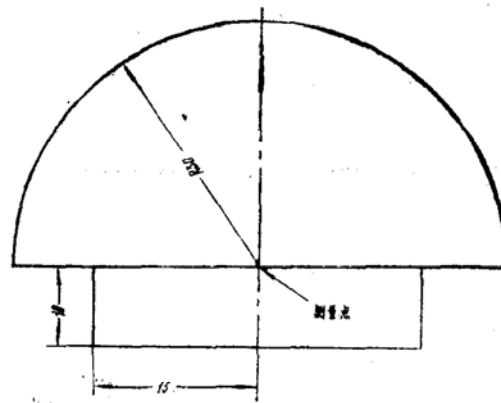


图2 燃气流条件下石墨半球测温点示意图

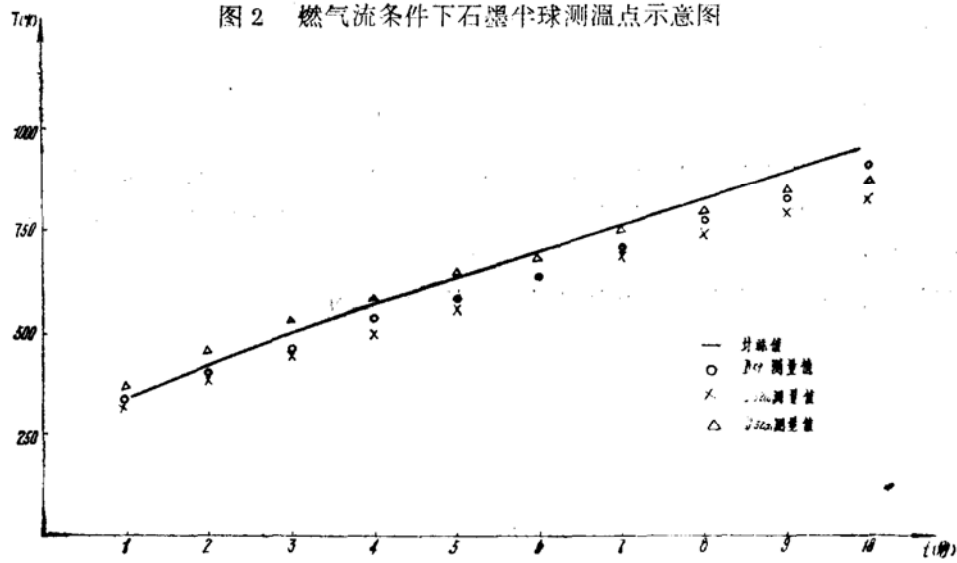


图3 石墨半球在燃气流条件下温度变化计算值与实验结果比较