Culick的线性声振荡燃烧理论研究

部　　冶

摘　　要

本文对F·E·C·Culick的线性声振荡燃烧理论进行了概括。对其特点和理论价值进行了评述，并提出了自己的看法。

符　号　表

a	声速	L	燃烧室长度
A_b	燃烧表面声纳	P	压力
R_b	响应函数	T	温度
C	微粒比热	ρ	密度
C_v	定容比热	γ	比热比
C_p	定压比热	m_b	燃烧表面流出的气体质量
e_o	气体滞止内能	M_b	燃烧表面处气体马赫数
q	燃烧室横截面周长	F	气体和微粒间的作用力
R	质量平均气体常数	Q	均相反应释放的热量
u	轴向气体流速	W_p	微粒转换成气体的速率
α	声能增长常数	$\bar{\rho}$	混合气体密度$\bar{\rho}=\rho(1+k)$
e_{po}	微粒滞止内能	$k=\rho_p/\rho$	
$E_e^2=\int_O^L \hat{P}_e^2 S_c dz$		ω	角频率
$E_N^2=\iiint_V \hat{P}_N^2 dV$		S_c	横截面积
h_o	气体滞止焓	t	时间
h_{os}	燃烧边界的h_o值	z	轴向变量
K	复合波数	r	径向变量
		ϕ	周向角

上标：

$\wedge$	谐波扰动复振幅	—	平均值
$'$	扰动值	r	实部
i	虚部	p	颗粒物质

下标：

b	燃烧表面处	o	滞止值
s	燃烧边界	d	阻尼值
e	e^{th}振模	//	声振完全平行于燃烧面
N	N^{th}振模	$\perp$	声振完全垂直于燃烧面

一、引　　言

近年来，美国加利福尼亚工学院教授Culick在固体火箭发动机振荡燃烧理论研究方面成果显著，影响广泛。从61年起，他一直研究这个课题，他的理论不仅继承了他以前振荡燃烧理论的优点，而且形成了具有自己特点的一整套理论方法。重视和认眞研究他的理论，借鉴他的理论指导我们的实验和设计工作，可以说是提高振荡燃烧理论与实验研究水平的重要途径。

二、Culick理论的产生与演变过程

固体火箭发动机振荡燃烧的研究在四十年代就开始了。Grad最先引用时间滞后概念，对燃烧区声放大作了时间滞后分析，导出了气相中在压力和温度的扰动下质量流的张弛时间。五十年代，Moore·F·K·、Maslen·S·H、Green·L程心一等改进了时间滞后理论。Crocco·L、钱学森等人对燃烧室喷管声纳的分析、至今仍经常被人引用。

六十年代初，Mcclure·F·T、Hart·R·W、Cantrell等人经常互相合作，发表了一系列论文。他们的理论主要是基于气相反应区空间结构的机械燃烧模型。这个理论及后来各种变形理论完全抛弃了时间滞后的概念，在整个六十年代固体火箭发动机振荡燃烧的研究占有统治地位。

机械燃烧模型的理论认为：火焰区表面的燃烧过程是由流体力学过程所控制的，用时间滞后来代表这些过程就显得过于简单。Mcclure、Hart等人所提出的机械燃烧模型是基于声能平衡的分析，由燃烧室中产生的总声能守恒的概念得出的结果。这样的分析方法很粗糙、很笼统，燃烧室内发生的一些局部过程，例如悬浮颗粒的阻尼、剩余燃烧的能量释放、燃烧表面的质量加入等被掩盖了，所得出的结果也不能引伸到非线性情况，非定常流场的能量变化由于用定常流场的能量关系进行表示而失眞。所有这些问题在Culick的理论中都得到了较好的补充和完善。当然，声能平衡理论对于影响声振荡燃烧的重要因素相互间量的关系的表达是成功的，Culick的理论是在它的基础上发展起来的。

65年起，Culick把他过去研究液体火箭发动机振荡燃烧的数学方法[1][2]几乎原封不动的搬到固体火箭发动机振荡燃烧研究方面[3—5]。这套方法与液体火箭发动机振荡燃烧数学分析的创始人Crocco、程心一的时间滞后理论有着根本的区别。Culick在气流马赫数和所有参量的扰动量均为一阶微量的假设下，建立了描述波运动的非齐次波动方程。利用解经典波动方程的数学方法，解出了复波数K，由此得出燃烧室内的实际声能增长率α。特别是66年发表的文献[5]已经为73年和75年发表的Culick理论的系统总结[13][15]奠定了良好的数学方法。Culick在67年发表的文献[6]和68年发表的文献[7]与他后来的理论在分析方法、数学方法方面有所不同。这两篇论文主要是进一步总结和引伸了由Smith·A·G和Denison·M·R等人的分析方法。这种类型的理论假设：推进剂在固——气交界面热解气化，气相燃烧区的热量加热固相区并控制固相表面的热解过程。这个理论从固体推进剂温度为一元瞬变的热传导方程出发。由于认为交界面燃烧区的响应是由固体内部的热传导过程所控制，气体扩散时间与气体热传导时间相比，前者较小且化学反应时间很快，所以固体内部的热传导时间是所有特征时间中最大的。这样，除固体中的热传导外，所有过程都当做准稳态来处理。也就限定了这套理论只能在低频范围内使用。

在文献[13]和[15]中，Culick认为推进剂的燃烧是由气体的流动过程所控制的。他使用气

体的质量、动量、能量守恒方程变换成描述波运动的方程和边界条件。文献[8—11] 是Culick理论的初级阶段，文献[13][15]是该理论成熟的总结。在文献[14]中，Culick在一定条件下，验证了理论推导的部分结果，并把理论推广到各种形式装药的T-形燃烧器这一特定情况。

固体火箭发动机振荡燃烧的物理现象是十分复杂的。目前还不能从基本机理出发，单纯通过理论分析最终得出某发动机是否能保持稳定燃烧的结论。Culick理论也没有能突破这一点，仅仅是对一部分实际问题做出了更符合客观情况的预示。

三、一维理论的主要内容和特点

Culick在70年发表的文献[8] 给出了在边界上有质量加入的管流气体动力学守恒方程组，它可以考虑平均流对声能增长趋势的作用，燃烧室不再简单地简化为一般的声腔。在73年的文献[13]进一步完善了这组方程并扩展到两相流以便考虑燃烧时含有金属粉末和颗粒的作用。这组方程还考虑了边界上发生的主要过程和剩余燃烧等作用。

一维理论的特点还有：对一维管流声腔引入平均流概念，认为燃烧区边界上诸因素对流场中空间各点的影响是均匀的。守恒方程被线性化以后构成了压力扰动的线性非齐次波动方程，方程的非齐次项包含了燃烧表面平均流，悬浮颗粒，剩余燃烧，质量加入等因素的影响。线性化后的边界条件也是非齐次的，包含了边界上因素的作用。对于扰动分析，认为考虑谐振运动就已经够用了，直到解出复波数K。

控制守恒方程组主要引用了如下假设，（1）把气体看成为具有定常比热并遵守完全气体定律的单组分气体；（2）略去气体中的粘性力和热传导；（3）用平均値的方法把悬浮颗粒看成是一种流体。守恒方程为：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S_c)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho u S_c)=\int m_b dq+W_p S_c$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_p S_c)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho_p u_p S_c)=\int m_b^{(p)} dq-W_p S_c$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[(\rho u+\rho_p u_p)S_c]+\frac{\partial}{\partial z}[(\rho u^2+\rho_p u_p^2)S_c]+S_c\frac{\partial \rho}{\partial z}$$

$$=\int u_s m_b dq+\int u_{ps} m_b^{(p)} dq$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[(\rho e_o+\rho_p e_{po})S_c]+\frac{\partial}{\partial z}[(\rho u e_o+\rho_p u_p e_{po})S_c]+\frac{\partial}{\partial z}(puS_c)$$

$$=\int h_{os} m_b dq+\int e_{pos}^{(p)} m_b^{(p)} dq+QS_c$$

利用热力学和气体动力学关系式，动量方程和能量方程可以变换为：

$$\rho S_c\frac{\partial u}{\partial t}+\rho u S_c\frac{\partial u}{\partial z}+S_c\frac{\partial p}{\partial z}=S_c(F-\sigma+\mu)\frac{\partial}{\partial t}(S_c P)+\gamma P\frac{\partial}{\partial z}(S_c u)+uS_c\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$=\frac{R}{C_v}\int[h_{os}-e_o+C_v T]m_b dq+\frac{R}{C_v}\int(e_{pos}-e_{po})m_b^{(p)} dq+\frac{R}{C_v}S_c[(u_p-u)F$$

$$+u(\sigma-\mu)]+\frac{R}{C_v}S_c[(e_{po}-e_o+C_v T)W_p+Q+Q_p]$$

其中：

$$F=-\left(\rho_p\frac{\partial u_p}{\partial t}+\rho_p u_p\frac{\partial u_p}{\partial z}\right)$$

$$\sigma=\frac{1}{S_c}\left[u\int m_b dq+u_p\int m_b^{(p)}dq\right]+(u-u_p)W_p]$$

$$\mu=\frac{1}{S_c}\left[\int u_s m_b dq+\int u_{ps}m_b^{(p)}dq\right]$$

把动量方程和能量方程线性化后取一阶微量并结合成波动方程：

$$\frac{1}{S_c}\frac{\partial}{\partial z}\left(S_c\frac{\partial P'}{\partial z}\right)-\frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2}=h_1$$

其中非齐次项：

$$h_1=-\rho_0\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\bar{u}u')+\frac{1}{S_c}\frac{\partial}{\partial z}\left[S_c(F'-\sigma'+\mu')\right]+\frac{\bar{u}}{a_0^2}\frac{\partial^2 P'}{\partial z\partial t}$$

$$+\frac{\gamma}{a_0^2}\frac{\partial p'}{\partial t}\frac{1}{S_c}\frac{d}{dz}(\bar{u}S_c)-\rho_0\frac{\partial}{\partial z}(\bar{u}u')\frac{dmS_c}{dz}-\frac{1}{a_0^2}\frac{\partial P_1'}{\partial t}$$

上式中的P_1'是P_1的一阶扰动量：

$$S_cP_1=\int\left[a^2+\gamma R\Delta T+\frac{R}{2C_v}(u_b^2-u^2)\right]m_b dq$$

$$+\frac{R}{C_v}\int\left[C\Delta T_p+\frac{1}{2}(u_{ps}^2-u_p^2)m_b^{(p)}dq\right.$$

$$+\frac{R}{C_v}S_c\left[(u_p-u)F+u(\sigma-\mu)\right]$$

$$+\frac{R}{C_v}S_c\left[(e_{po}-e_o+C_vT)W_p+(Q+Q_p)\right]$$

$$\Delta T=T_s-T;\qquad \Delta T_p=T_{ps}-T_p$$

P'的边界条件由动量方程在纵向振荡的二端面处给出：

$$\frac{\partial P'}{\partial z}=-f_1\qquad (z=O,L)$$

$$f_1=\rho_0\frac{\partial u'}{\partial t}+\rho_0\frac{\partial}{\partial z}(\bar{u}u')-(F'-\sigma'+\mu')$$

对于谐振荡有

$$\frac{P'}{\hat{P}}=\frac{f_1}{\hat{f}_1}=\frac{h_1}{\hat{h}_1}=\frac{u'}{\hat{u}}=\frac{T'}{\hat{T}}=\exp(ia_0Kt)$$

上式代入波动方程中并对十几个非齐次因素积分求解，解出的最后结果为：

$$(K^2-K_e^2)E_e^2=i\rho_0a_0K_e\left\{\left[\hat{P}_e\left(\hat{u}+\frac{\bar{u}\hat{P}_e}{\rho_0a_0^2}\right)^{=(1)}S_c\right]_0^L-\int_0^L\hat{P}_e\int\left(\frac{\hat{m}_b}{\rho_0}\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\bar{m}_b}{\rho_0}\frac{\Delta\hat{T}}{T_0}\right)^{=(2)} dqdz\right\} + \frac{iK_e}{a_0}\left\{\frac{1}{\rho_0}\int_0^L \frac{1}{K_e^2}\left(\frac{d\hat{P}_e}{dz}\right)^2 \int m_b dqdz\right\}^{=(3)}$$

$$+\left\{\int_0^L \hat{u}_p \frac{d\hat{P}_e}{dz}\int \bar{m}_b^{(p)} dqdz - \int_0^L \hat{F}\frac{d\hat{P}_e}{dz} S_c dz\right.$$

$$\left.-\frac{iK_e}{a_0}\frac{CR}{C_v}\int_0^L \hat{P}_e \Delta\hat{T}_p \int \bar{m}_b^{(p)} dqdz\right\}^{=(4)}$$

$$+\left\{ i\frac{K_e}{a_0}\frac{\gamma-1}{\rho_0}\int_0^L \hat{P}_t^2 \overline{W}_p s_c dz + \int_0^L (\hat{u}-\hat{u}_p)\frac{d\hat{P}_e}{dz}\vec{w}_p s_c dz\right.$$

$$\left.-\frac{iK_e}{a_0}\frac{R}{c_v}\int_0^L \hat{P}_e\left[\left(\hat{e}_p\bar{w}_p + \tilde{e}_p\hat{w}_p\right) + \left(\hat{Q} + \hat{Q}_p\right)\right] s_c dz\right\}^{=(5)}$$

$$-\left\{\int_0^L s_c \hat{u}\frac{d\hat{P}_e}{dz}dz\right\}^{=(6)}$$

由 $-2\alpha = \frac{a_0}{k_e}\mathrm{Im}(K^2 - K_e^2)$ 则可求得声能增长率与各扰动因素之间的关系。方程解中诸项的物理含义是：

（1）表示燃烧室前端和喷管入口平面导纳函数与平均流的作用：式中

$$\rho_0 a_0\left[\hat{P}_e\left(\hat{u} + \frac{\bar{u}\hat{P}_e}{\rho_0 a_0^2}\right)S_c\right]_0^L = [(A_b + \overline{M})\hat{P}_e^2 S_c]_0^L$$

其中声纳
$$A_b = \frac{\hat{u}/a_0}{\hat{P}_e/\gamma P_0}$$

（2）表示侧燃烧表面导纳函数、平均流和非等熵温度效应的作用；式中

$$\rho_0 a_0\int_0^L \hat{P}_e \int\left(\frac{\hat{m}_b}{\rho_0} + \frac{\bar{m}_b}{\rho_0}\frac{\Delta\hat{T}}{T_0}\right)dqdz$$

$$= \int_0^L \hat{P}_e^2 \overline{M}_b \int\left(\frac{\hat{m}_b/\bar{m}_b}{\hat{P}_e/\gamma P_0} + \frac{\Delta\hat{T}/T_0}{\hat{P}_e/\gamma P_0}\right)dqdz$$

$$= \int_0^L\int \hat{P}_e^2 \overline{M}_b\left(\frac{\hat{u}_b/\bar{u}_b}{\hat{P}_e/\gamma P_0} + \frac{\hat{\rho}_b/\rho_0}{\hat{P}_e/\gamma P_0} + \frac{\Delta\hat{T}/T_0}{\hat{P}_e/\gamma P_0}\right)dqdz$$

$$= \int_0^L\int \hat{P}_e^2 (A_b + \overline{M}_b)dqdz$$

$$= \int_0^L\int \hat{P}_e^2 \overline{M}_b R_b dqdz$$

在非等熵情况下

$$\hat{u}_b = \frac{\hat{m}_b}{\rho_0} + \bar{u}_b\frac{\Delta\hat{T}}{T_0} - \frac{\bar{u}_b\hat{P}_e}{\gamma P_0}; \qquad R_b = \frac{\hat{m}_b/\bar{m}_b}{\hat{P}_e/\gamma\rho_0}$$

可见（1）和（2）的物理概念是相同的。$\frac{\Delta\hat{T}/T_0}{\hat{P}_e/\gamma P_0}$ 反映了非等熵温度扰动的作用。

（3）表示质量加入效应；

（4）表示颗粒物质的作用；

（5）剩余燃烧的作用；

（6）边界的附加动量作用。

如果把（4）、（5）两项由于颗粒物质产生的影响去掉，解的结果就可以适应于均质推进剂。一定量的实验数据[14]已经定性的与理论一致。但是，边界的热量交换，质量加入对声波运动的衰减等问题目前还难以定量的计算。

对于T-形燃烧器，由$a_0^2k=\omega^2-2i\alpha\omega-\alpha^2$，并略去颗粒物质和其它次要因素，可得出声放大常数为：

$$\alpha=-\frac{\rho_0a_0}{2E_e^2}\left\{\left[\hat{P}_e\left(\hat{u}_b^{(r)}+\frac{\bar{u}_b\hat{P}_e}{\rho_0a_0^2}\right)S_c\right]_b^L-\int_0^L\hat{P}_e\int\bar{u}_b\left(\frac{\hat{m}_b^{(r)}}{\bar{m}_b}+\frac{\Delta\hat{T}^{(r)}}{T_0}\right)dqdz\right\}$$

$$-\frac{1}{2E_e^2}\left\{\int_0^L\frac{1}{k_e^2}\left(\frac{d\hat{P}_e}{dz}\right)^2\int\bar{u}_bdqdz\right\}+\alpha d$$

α_d为包含其它各因素的阻尼常数。上式可以作为各种形式装药的T-形燃烧器实验依据。

Culick把质量加入项推广到有质量抽出情况，这时该项前面的负号变正，由此Culick推论出燃烧室内有质量抽出时将产生声能增益，而有侧面喷孔的T-形燃烧器便属于这种情况。这一推论引起了争论。首先是在振荡燃烧的实验工作方面卓有成就的Coates发表评论，认为不存在这个增益，否则破坏了绝热过程的熵并出现熵减，违反热力学第二定律。他还认为质量抽出情况下声振速度的边界条件与质量加入情况不同。Culick在文献[14]和77年发表的论文中对这一结论进行了定性证明，但这一实验是否严格仍值得商榷。

在导出响应函数的过程中$\hat{u}$和$\bar{u}$分别用了$\hat{u}_b$和$\bar{u}_b$代替，为的是强调这些速度是贴近于燃烧表面的，其方向是朝内为正。对于式中的项$-\hat{P}_e\left(\hat{u}_b+\frac{\bar{u}_b\hat{P}_e}{\rho_0a_0^2}\right)$实际意味着声波速度是垂直于燃烧表面的，对于$-\hat{P}_e\left(\frac{\hat{m}_b}{\rho_0}+\bar{u}_b\frac{\Delta\hat{T}}{T_0}\right)$意味着全部声波速度平行于燃烧表面。它们仅仅是表示了声波和推进剂的耦合，而与这种波动究竟是由什么原因引起的无关，可能是压力耦合也可能是速度耦合。

Culick一维理论的主要缺点和不足是：所得结果是在燃烧区边界众多因素对流场各点的影响是均匀的假设下进行的，因为只有这样才能把难于解出的边界条件转化为波动方程的非齐次项，使得声能增长率的解析解成为可能。而实际情况边界上诸因素对流场的影响是从边界到流场中心由强到弱变化的，且各因素互相之间有非线性的作用。在这样苛刻的边界条件下得出解析解是没有指望的，Culick的假设使得解的结果过分夸大了边界因素的作用。其次，Culick没有考虑装药燃烧边界运动的影响，他在推导和解方程中假定通道面积是常量。笔者曾在通道截面变化的条件下推导Culick的一维理论，得出了燃烧边界的运动将对声能起到衰减作用的结论。

四、三维理论与一维理论的差别

Culick一维理论引用的平均流概念，严格讲只有对无限长细管道才合理。一维理论的控制体边界可以取在圆形通道的燃烧表面上。这样，边界上的一些因素便包含在描述波运动方

程的非齐次项中，对于三维控制体则办不到这一点，这使得三维控制体的质量、动量和能量方程无法考虑一维理论中已经考虑的由边界质量加入带来的边界动量、热量的作用。三维理论引用的基本方程是：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{u})=w_p$$

$$\frac{\partial\rho_p}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_p\vec{u}_p)=-W_p$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{u}+\rho_p\vec{u}_p)+\nabla\cdot(\rho\vec{u}\vec{u}+\rho_p\vec{u}_p\vec{u}_p)+\nabla P=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e_0+\rho_p e_{p0})+\nabla\cdot(\rho\vec{u}e_0+\rho_p\vec{u}_p e_{p0})+\nabla\cdot(P\vec{u})=Q$$

变换以后的动量和能量方程分别为：

$$\rho(1+k)\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\rho(1+k)\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}+\nabla P=\delta\vec{F}-\vec{\sigma}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla P+\left(\frac{\overline{R}}{\tau_v}+1\right)P\nabla\cdot\vec{u}$$
$$=\frac{\overline{R}}{\overline{C}_v}\left[(\vec{u}_p-\vec{u})\cdot\vec{F}_p+\vec{u}\cdot\vec{\sigma}+(e_{p0}-e_0)\,W_p+(Q+\delta Q_p)+(1+k)\overline{C}_vTW_p\right]$$

其中：
$$\delta\vec{F}=\vec{F}+\rho_p\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\rho_p\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}$$

$$\vec{\sigma}=(\vec{u}-\vec{u}_p)W_p$$

$$\vec{F}=-\rho_p\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\right]-\rho_p\left[\frac{\partial\delta\vec{u}_p}{\partial t}+\vec{u}_p\cdot\nabla\delta\vec{u}_p+\delta\vec{u}_p\cdot\nabla\vec{u}\right]$$

$$\delta Q_p=-\rho_p C\left[\frac{\partial\delta T_p}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\delta T_p+\delta\vec{u}_p\cdot\nabla T\right]$$

$$\delta T_p=T_p-T\qquad\qquad\delta\vec{u}_p=\vec{u}_p-\vec{u}$$

把动量和能量方程线性化后取平均流速和扰动振幅的一阶微量则有：

$$\rho\frac{\partial\vec{u}'}{\partial t}+\nabla P'=-\rho(\vec{\bar{u}}\cdot\nabla\vec{u}'+\vec{u}'\cdot\nabla\vec{\bar{u}})+\delta\vec{F}_p'-\vec{\sigma}'$$

$$\frac{\partial P'}{\partial t}+\left(\frac{\overline{R}}{\overline{C}_v}+1\right)P_0\nabla\cdot\vec{u}'=-\vec{\bar{u}}\cdot\nabla P'-\left(\frac{\overline{R}}{\overline{C}_v}+1\right)P'\nabla\cdot\vec{\bar{u}}+P'$$

$$P'=\frac{\overline{R}}{\overline{C}_v}\left[(1+k)(e_p'\overline{W}_p+\bar{e}_pW_p')-kc\delta T_p'\overline{W}_p+(Q'+\delta Q_p')\right]$$

结合上式便可得出对于压力的非齐次波动方程：

$$\nabla^2P'-\frac{1}{\bar{a}^2}\frac{\partial^2P'}{\partial t^2}=h$$

边界条件为：$\hat{n}\cdot\nabla P'=-f$

h和f的扰动量分别为：

$$h = -\bar{\rho}\nabla\cdot(\bar{\vec{u}}\cdot\nabla\vec{u}' + \vec{u}'\cdot\nabla\bar{\vec{u}}) + \frac{1}{\bar{a}^2}\bar{\vec{u}}\cdot\nabla\frac{\partial P'}{\partial t}$$

$$+\frac{\gamma}{\bar{a}^2}\frac{\partial P'}{\partial t}\nabla\cdot\bar{\vec{u}} + \nabla\cdot(\delta\vec{F}_p - \vec{\sigma}') - \frac{1}{\bar{a}^2}\frac{\partial P'}{\partial t}$$

$$f = \bar{\rho}\frac{\partial\bar{u}'}{\partial t}\cdot\hat{n} + \bar{\rho}(\bar{\vec{u}}\cdot\nabla\vec{u}' + \vec{u}'\cdot\nabla\bar{\vec{u}})\cdot\hat{n} - (\delta\vec{F}_p - \sigma')\cdot\hat{n}$$

把复振幅代替各扰动量后解得的结果为：

$$(k^2 - k_N^2)E_N^2 = -i\bar{\rho}\bar{a}k_N\oint\left(\hat{u}\hat{P}_N + \frac{\hat{P}_N^2}{\bar{\rho}\bar{a}^2}\bar{u}\right)\cdot\hat{n}dS$$

$$-\int\delta\vec{\hat{F}}\cdot\nabla\hat{P}_N dV - i\frac{K_N}{\bar{a}}\int\hat{P}_N\hat{P}dV$$

$$+\int\left(\vec{\hat{U}} - \vec{\hat{U}}_P\right)\cdot\Delta\hat{P}_N\overline{W}_p dV + i\frac{(\bar{\gamma}-1)K_N}{\bar{\rho}\bar{a}}\int\hat{P}_N^2\overline{W}_P dV$$

由此可见，三维与一维理论的主要差别是三维理论不能考虑边界的流动情况，边界处的动量、能量改变无法包括在内。Culick为了修正这一点，把一维推导的结果的各相应项写成三维，这样做虽然不够严格，但从道理上是可以说得通的。例如质量加入项可写成为：

$$\frac{1+k}{\bar{\rho}}\int_O^L\frac{1}{k_e^2}\left(\frac{d\hat{P}_e}{dZ}\right)^2\int\bar{m}_b dqaZ \equiv \frac{1+k}{\bar{\rho}}\oint\frac{1}{k_e^2}\left(\frac{d\hat{P}_e}{dZ}\right)^2\bar{m}_b dS$$

因为加入的质量必须得到所达到处当地的动能，对于扰动的声场，垂直于表面的速度为零，接近于表面的当地动能一般情况正比于$(\nabla\hat{P}_N)^2$，故质量加入项的三维情况可写为：

$$\frac{1+k}{\bar{\rho}}\oint\frac{1}{k_e^2}(\nabla\hat{P}_N)^2\bar{m}_b dS$$

其它项也可类似的处理。但由于已经存在一维理论，这样做的实际意义并不大。结果把一维理论中引入的假设带入了三维理论，三维理论没有能反应出空间各点参数的不均匀性对波运动带来的影响。导出的结果是：

$$(K^2 - K_N^2)E_N^2$$

$$= -i\bar{\rho}\bar{a}k_N\oint(\vec{\hat{u}}_{11}\delta_{11} + \vec{\hat{u}}_{\perp}\delta_{\perp})\hat{P}_N ds + i\frac{ltk}{\bar{\rho}\bar{a}k_N}\oint(\nabla\hat{P}_N)^2\bar{m}_b\delta_{11}ds$$

$$+\oint\delta\vec{\hat{u}}_p\cdot\nabla\hat{P}_N\bar{m}_b^{(p)}\delta_{11}dS - \int\delta\vec{\hat{F}}\cdot\nabla\hat{P}_N dV + \int(\hat{u} - \vec{u}_p)\cdot\nabla\hat{P}_N\bar{w}_p dV$$

$$-\frac{ik_N}{\bar{a}}\frac{\overline{R}}{\overline{C}_v}\int\hat{P}_N[(\hat{e}_p\bar{w}_p t\bar{e}_p\hat{w}_p) + (\hat{Q} + \delta\hat{Q}_p)]dV$$

$$+ i\frac{k_N(\bar{\gamma}-1)}{\bar{\rho}\bar{a}}\int\hat{P}_N^2\bar{w}_p dV - \oint(\vec{\hat{u}}_s\bar{m}_b + \vec{\hat{u}}_{ps}\bar{m}_b^{(p)})\cdot\nabla P_N\delta_{11}dS$$

其中：

$$\delta_{11} = \frac{|\nabla_{11}\cdot\vec{\hat{u}}|}{|\nabla_{11}\cdot\vec{\hat{u}}| + |\nabla_{\perp}\cdot\vec{\hat{u}}|};\quad \delta_{\perp} = \frac{|\nabla_{\perp}\cdot\vec{\hat{u}}|}{|\nabla_{11}\cdot\vec{\hat{u}}| + |\nabla_{\perp}\cdot\vec{\hat{u}}|}$$

对于圆柱形燃烧室，经典振模可以写为：

$$\hat{P}_N = \cos(k_e z)\cos(m\Phi)J_m(K_{mn}r)$$

$$\hat{\vec{u}}_N = \frac{i}{\bar{\rho}\bar{a}k_N}\nabla P_N$$

$$= \frac{i}{\bar{\rho}\bar{a}k_N}\Big\{\hat{r}\,K_{mn}\frac{dJ_m}{dr}\cos(k_e z)\cos(m\Phi)$$

$$-\hat{\Phi}\frac{m}{r}J_m\cos(k_e z)\sin(m\Phi) - \hat{z}\,k_e J_m \sin(k_e z)\cos(m\Phi)\Big\}$$

其中：$k_N^2 = k_e^2 + k_{mn}^2$ 　　k_{mn}是 $\frac{d}{dr}J_m k_{mn}r) = 0$的

根，$m = 0,1,2,\cdots\cdots$；$k_e = e\pi/L$，$e = 0,1,2,\cdots\cdots$。

忽略剩余燃烧和悬浮颗粒的影响则有：

$$-\frac{2\alpha\omega_N E_N^2}{\bar{a}^2} = -\bar{\rho}\bar{a}k_N \oint (\hat{\vec{u}}_{11}^{(r)}\delta_{11} + \hat{\vec{u}}_{\perp}^{(r)}\delta_N)\ \hat{P}_N dS$$

$$+\frac{1}{\bar{\rho}\bar{a}k_N}\oint(\nabla\hat{P}_N)^2\bar{m}_b\delta_{11}dS$$

$$-\oint\hat{\vec{u}}^{(i)}\cdot\nabla\hat{P}_N\bar{m}_b\delta_{11}dS + 2\ \frac{\alpha_d w_N}{\bar{a}^2}E_N^2$$

α_d在这里表示其它各种阻尼的总和，例如燃烧室壁的阻尼。δ_{11}和$\delta_\perp$原则上能直接从 数值结果得出，但Culik没有进行这个工作。对于纯的径向模($m = k_e = 0$时) $\delta_{11} = 0$。上式可以做为实验数据处理的依据。

五、结　　语

以上介绍的仅是Culick 线性声振荡燃烧理论的主要內容。他的这一套思考方法 自 成 体系，他还把他的理论具体化来研究摩擦阻尼、颗粒阻尼的定量计算。他利用小参数展开方法把这套理论推广到非线性情况，并发表了许多论文。

还应该指出，尽管Culick在振荡燃烧研究方面独树一帜，但距离预示固体火箭发动机的振荡燃烧趋势还是很远的。他的工作给我们提示：寻求解析解的结果使得理论解与实际偏离较大，否则便得不到解析解，因为解析解几乎必须引入较多假设才成为可能；燃烧室声振荡的边界情况太复杂，影响因素很多又互相产生作用；如果要得到更接近实际情况的在较严格边界条件下的解，只有采用数值法由计算机程序完成。

参　考　文　献

(引用文献的作者均为F·E·C·Culick)

〔1〕"Stability of pressure oscillations in gas and liquid roeket combustion chambers"
Mass、Inst、Teeh，Aerophys，Lab，June、1961，

〔2〕"Stability of high-frequency pressure oscillationin rocket combustion chambers" AIAA Jour Vo1;6;No;5 May 1963

〔3〕 "Combustion instability of solid Propellants" Twhelth symposium (International)on combustion 1965
〔4〕 "Rotational axistymmetric mean flow and dampmg of acoustic waves in a solid propellant rocket"
AIAA Jour V01:4,No:8,Aug 1966
〔5〕 "Acoustic oscillations in soliel propellant rocket Chambers."
Astronautica Acta V01:12,No;2,1966
〔6〕 "Calculation of the admittance function for a burning surfoce"
Astronautica Acta Vol:13,1967
〔7〕 "A review of calculations for unsteady burning of a solid propellant"
AIAA Jour Vol:6,No:12,1968
〔8〕 "Stability of longitudinal oscillations with pressure and velocity coupling in a solid propellant rocket"
Combustion Scienee and Technology Vol:2,1970.
〔9〕 "A comparison of analysis and experiment for solid-Propellant combustion Instability"Culick,F、E、C,and Beakstead,M、W,
AIAA Jour Vol:9,No:1,Jan 1971
〔10〕 "Research on combustion instability and application to solid propellant rocket motors"
AIAA/SAE 7th Propulsion Joint Specialists Conference June,1971.
〔11〕 "Research on combustion instability and application to solid propellant roeket motors,"Ⅱ"AIAA Paper 72-1049
〔12〕 "Interaction between the flow field, combustion and wave motions in rocket motors"
Naval Weapons Center TP5349 June 1972
〔13〕 "The stability of one-dimensional motions in a rocket motor"
Combustion Scienee and Technology Vol:7,No:4,1973
〔14〕 "T-burner testing of metallized solid propellant"AFRPL-TR-74-28 AP001665
〔15〕 "Stability of three-dimensional in a combustion chamber"
Combustion science and Technology Vol:10,1975.
〔16〕 "Exitation of acoustic modes in a chamber by vorter shedding"F.E.C. culick, et al Journal of Sound and Vibration Vol:64,1979