

一维摩擦喷管流动

常显奇

摘 要

本文阐述了一维摩擦喷管流动控制方程的数值求解方法, 分析研究了摩擦对喷管流场及发动机性能的影响。确定边界条件时考虑了燃烧室工作过程。并给出了计算例题。

符 号 表

A —— 通道横截面积	n —— 压力指数
A_Q —— 功热当量	P —— 压力
A_b —— 装药燃烧面积	P_s —— 滞止压力
b —— 燃速系数	P_o —— 等熵流动滞止压力
f —— 摩擦系数	P_c —— 考虑摩擦时的燃烧室压力
g —— 重力加速度	R —— 气体常数
G —— 等熵流流量	T —— 温度
G_f —— 考虑摩擦时的流量	T_o —— 装药燃烧温度
H —— 1 公斤燃气的焓	x —— 轴向坐标
k —— 比热比	y —— 通道半径
M —— 气流马赫数	v —— 流速
$\bar{M}$ —— 燃气平均分子量	D —— 通道直径
α —— 扩张半角	ρ —— 密度
β —— 收敛半角	ρ_t —— 喷管喉部壁的曲率半径
Γ —— 比热比k的函数	γ_P —— 推进剂比重
$\Gamma = \sqrt{k} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$	

下 标

t —— 喷管几何喉部	cr —— 临界截面参数
c —— 喷管入口	e —— 喷管出口

一、引言

燃烧产物在喷管中流动, 由于粘性, 它与喷管壁间存在摩擦。特别是对膨胀比大的 (因而是较长的) 喷管, 摩擦的影响变得很重要。但在讨论摩擦对喷管性能的影响时, 当前的教科书均只作了定性分析。

摩擦对喷管的流场、排气速度及秒流量有何影响？对燃烧室压力有何影响？对固体发动机的比冲、推力等性能参数有何影响？如何减少摩擦损失？本文在一维摩擦喷管流动基本方程的基础上，详细讨论了数值求解的方法，通过理论分析，较好地回答了上述问题。这对于预估固体火箭发动机的性能是有益的。

二、控制方程

假设：

1. 燃烧产物是成份冻结的理想气体；
2. 流动是一维定常的；
3. 与喷管壁间没有热量交换。

考虑摩擦时燃气在喷管中运动的基本方程是：

$$\text{连续方程} \quad d(\rho v A) = 0 \quad (1)$$

$$\text{动量方程} \quad v dv = -\frac{1}{\rho} dp - f \frac{v^2}{2} \frac{dx}{D} \quad (2)$$

$$\text{能量方程} \quad d\left(H + A_Q \frac{v^2}{2g}\right) = 0 \quad (3)$$

$$\text{状态方程} \quad P = \rho g R T \quad (4)$$

局部壁面的摩擦系数〔2〕

$$f = 5.5 \times 10^{-3} \left[1 + \left(2 \times 10^4 \frac{K}{D} + \frac{10^6}{Re} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \quad (5)$$

式中，雷诺数 Re 根据喷管的当地直径 D 和当地气流参数计算

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu}$$

燃气的粘性系数〔3〕

$$\frac{dM^2}{dx} = \frac{2}{1-M^2} \left(\frac{kM^2 f}{D} - \frac{2}{A} \frac{dA}{dx} \right) \quad (7a)$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2$$

$$v = M \sqrt{kgRT}$$

(7b)

三、计 算 方 程

方程(7a)在 $M = 1$ 处是奇异的。为了求得数值解, 必须克服方程的奇异性。

引入新的变量 Z

$$Z = (1 - M^2)^2 \quad (8)$$

$$\text{则} \quad M^2 = 1 \mp \sqrt{Z} \quad (9)$$

亚音速流动 ($M < 1$) 时, 我们取“-”号; 超音速流动 ($M > 1$) 时取“+”号; 当 $M = 1$ 时, $Z = 0$, “±”号可任取。

从而(7a)式转换为

方程(10)与(7b)组成了计算方程组。

四、喉 部 条 件

方程(7a)与(7b)中共有七个未知数: M , T , v , ρ , G_f , P , P_s 。但只有六个方程, 为了求得数值解, 还必须补充一个方程。

由(1)~(4)式可求得

$$(M^2 - 1) \frac{dv}{v} = \frac{dA}{A} - \frac{kM^2 f}{2D} dx \quad (11)$$

可见, 在 $M = 1$ 处

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = \frac{kf}{2D} \quad (12)$$

此式称为喉部条件, 即我们所需要的一个补充方程。显而易见, 考虑摩擦时, 喷管的临界截面 ($M = 1$) 不在几何喉部处, 而是位于 $\frac{dA}{dx} > 0$ 的喷管几何喉部下游的扩张段中。

将(12)式代入(10)式, 得到 $M = 1$ 时, $\frac{dz}{dx} = 0$ 。

计算中, 我们就用喉部条件来确定通过喷管的秒流量。如果给定流量下所得到的方程的解满足(12)式, 则该流量就是控制方程的解; 否则, 应改变流量重新计算。

如图 1 所示, 对于几何喉部采用圆弧过度的喷管, 当 $x_t \leq x < x_2$ 时,

$$y = (\rho_t + y_t) - \sqrt{\rho_t^2 - (x - x_t)^2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x - x_t}{\sqrt{\rho_t^2 - (x - x_t)^2}},$$

而

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = \frac{2}{y} \frac{dy}{dx},$$

故由(12)式可求得考虑摩擦时喷管临界截面的位置

$$x_{cr} = x_t + \frac{\rho_t}{\sqrt{1 + \frac{64}{k^2 f^2}}} \quad (13)$$

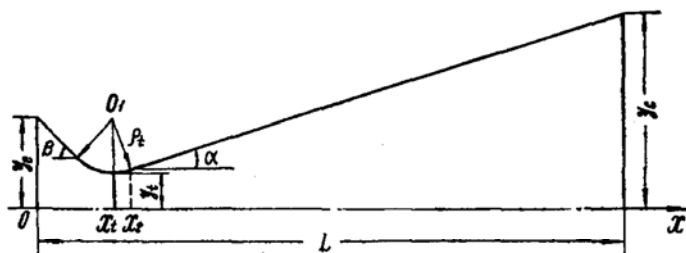


图1 喷管型面

五、边界条件

为了数值求解方程(10)，必须给定边界条件，即喷管入口处燃气的流动参数。

对于不计摩擦的等熵喷管流动，当给定喷管入口处的滞止温度 T_0 和滞止压力 P_0 时，喷管的秒流量

$$G = C_D A_t P_0 \quad (14)$$

式中

$$C_D = \frac{\Gamma \sqrt{g}}{\sqrt{RT_0}}$$

但考虑摩擦时，流量 G 并不是通过喷管的实际流量，在计算之前，通过喷管的实际流量是未知的，故只能假定一个流量 G_f 来计算。

首先，我们由假定的流量 G_f 重新确定燃烧室压力 P_c 。当不计装药通道中的流动效应时，

$$P_c = \left(\frac{G_f}{\gamma_p b A_b} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (15)$$

设 G_f 等熵流过一个“虚拟”喷管，该虚拟喷管的入口尺寸与实际喷管相同，但喉部尺寸不同。设虚拟喷管的喉部半径为 y_K ，则由等熵流流量公式

$$y_K = \sqrt{\frac{G_f}{C_D P_c \pi}} \quad (16)$$

代(15)入(16)得

$$y_K = \sqrt{\frac{(\gamma_p b A_b)^{\frac{1}{n}}}{C_D \pi}} \cdot G_f^{\frac{n-1}{2n}} \quad (17)$$

于是，根据入口截面与虚拟喷管喉部截面的面积比 $\frac{A_c}{A_k} \left(= \frac{y_c^2}{y_k^2} \right)$ ，便可按等熵流动关系式确定喷管入口处的燃气流动参数。

由给定流量 G_f 计算出边界条件后，即可对计算方程组进行数值解。

六、关于流量迭代

然而,所假定的流量 G_f 也不一定就是通过摩擦喷管的实际流量,实际流量需要通过流量迭代计算来确定。

如果给定流量 G_f 的计算结果满足喉部条件(12),则 Z 沿喷管轴向的变化如图2(a)所示, $M=1$ 时, $Z=0$, $\frac{dZ}{dx}=0$,这说明 G_f 是通过摩擦喷管的实际流量。

当 G_f 不满足喉部条件(12)时,如图2(b)所示, Z 和 M 沿喷管轴向的变化有两种情况:

1. 曲线1表明,虽然 $M=1$ 时 $Z=0$,但 $\frac{dZ}{dx} \neq 0$,这是由于喷管入口处流速太大造成的。为了满足喉部条件,应减小入口处的气流速度。

由于燃速指数 n 总是小于1的,由(17)式可知,当 G_f 增加时, y_k 减小,使面积比 $\frac{A_c}{A_k}$ 增大, M_c 减小,喷管入口处的流速减小。所以,为了减小入口处的流速,反而应当增加通过喷管的流量。

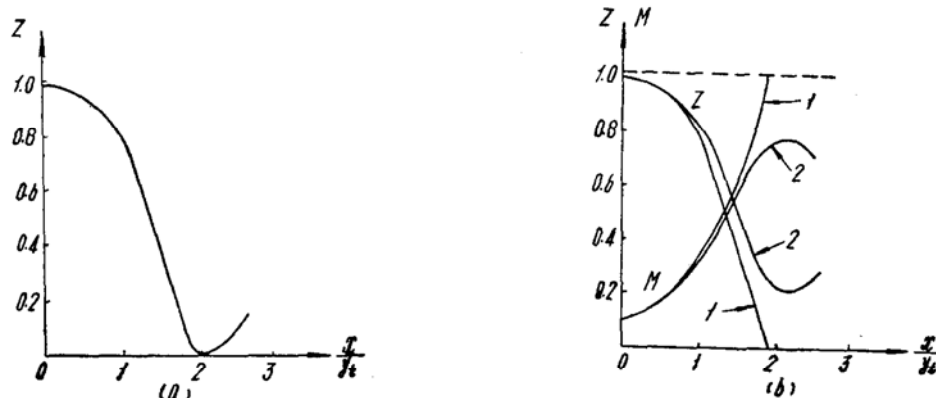


图2 Z 沿喷管轴向的变化

2. 曲线2表明,整个喷管中的流动均为亚音速流动,这时根本就不存在音速点。气流 M 数的变化是先增大,而后又减小。这是由于入口处流速太小造成的。为了满足喉部条件,应增大入口处的流速,即要减小喷管流量。所以,计算中如果出现后一步长的 M 数小于前一步长的 M 数(即当 $M_{i+1} < M_i$ 时),就应减小流量重新计算边界条件。

计算中,我们就用上述两种情况来判断流量的增减,并用对分区间法确定流量增减的多少,直到满足喉部条件为止。

$$\text{令 } C = \frac{G_f}{G}$$

我们把 C 叫做摩擦喷管的流量修正系数。取 C 的初始变化区间为 ΔC (比如,取 $\Delta C = 0.002$),根据对分区间法的特点,我们还可把 $\left| \frac{\Delta C}{2^m} \right| \leq \epsilon$ 作为终止流量迭代的判据。此处, m 为迭代计算的次数, ϵ 为所给定的计算精度(比如,取 $\epsilon = 10^{-7}$)。

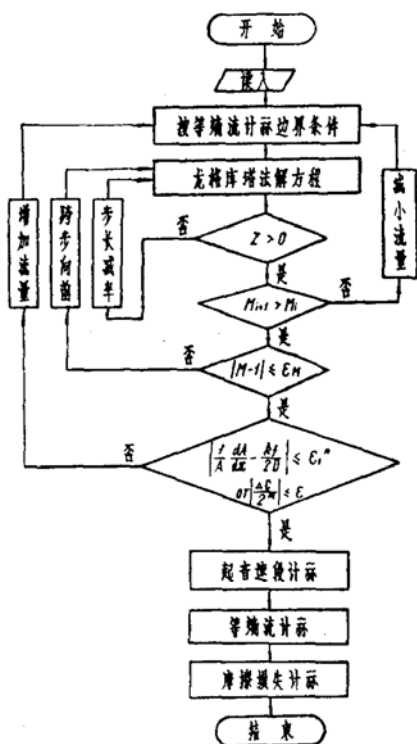


图3 计算框图

* 注: ϵ_1 为给定的计算精度, 比如取 $\epsilon_1 = 10^{-8}$ 。

从上面的分析可知, 为了检验给定的流量 G_f 是否满足喉部条件, 先要找到音速点。同时, 由于亚音速和超音速段的计算方程(10)不同, 所以计算中也必须找到音速点。对于图 2(a)及图 2(b)中曲线 1 所示的情况, 当计算到 M 接近于 1 时, 都会因计算步长过大而出现 $Z < 0$, 这时, 因出现负数开方而使计算不能继续进行, 因而捕捉不到音速点。所以, 计算中只要出现 $Z < 0$, 我们就将步长减半而对这一步重新计算, 用改变步长的方法向 $M = 1$ 点逼近, 直到该点的 M 数满足 $|M - 1| \leq \epsilon_M$ 为止 (ϵ_M 为给定的计算精度, 比如取 $\epsilon_M = 10^{-5}$)。

数值求解过程计算框图如图 3 所示。

七、算 例

某固体火箭发动机喷管如图 1 所示。收敛段与扩张

段均为锥形, 几何喉部处采用圆弧过渡。 $\frac{\rho_t}{\gamma_t} = 1.481$,

$\frac{y_c}{\gamma_t} = 2.459$, $\frac{y_e}{\gamma_t} = 5.393$, $\frac{L}{\gamma_t} = 15.827$, $\alpha = 18^\circ$,
 $\beta = 45^\circ$, $K = 40$ 微米。 $T_o = 2775^\circ K$, $P_o = 45$ 公斤/厘米²,
 $k = 1.21$, $\gamma_p = 1.742$ 克/厘米³, $\bar{M} = 25.08$, $n = 0.2656$,
 $b = 0.2391$ 厘米/秒, $A_b = 37426$ 厘米²。

1. 燃气参数沿喷管长度的分布

图 4~图 7 分别示出了 V , T , P , P_s , ρ 沿喷管长度的分布。由图可见, 气流速度沿喷

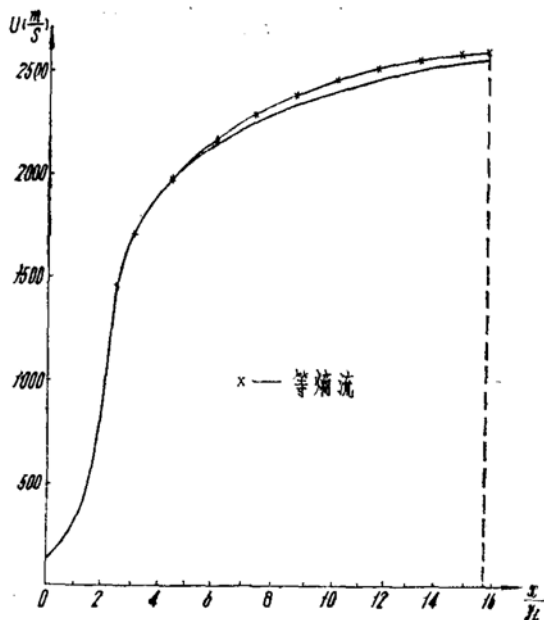


图4 流速沿喷管分布

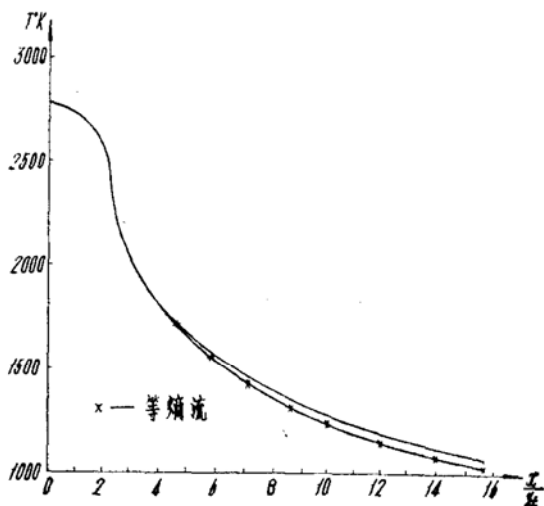


图5 温度沿喷管分布

管增大，温度、压力及密度沿喷管降低。其变化率在跨音速区最大。由于气体要克服摩擦力做功使其动能损失，摩擦功转变成热又加给气体，所以，与不计摩擦的等熵流动比较，气流速度减小，温度升高。而且这些参数的偏差主要发生在超音速区。由于摩擦的影响，喷管排气速度减小1.6%，排气面上温度升高5.5%，压力增大2.2%，密度降低3.0%。

由于摩擦，燃气在喷管中的流动是一个不可逆的增熵过程，其总压降低。由图6可见，在跨音速区总压急剧下降。与不计摩擦时的等熵流动相比，排气面上总压损失25.5%。

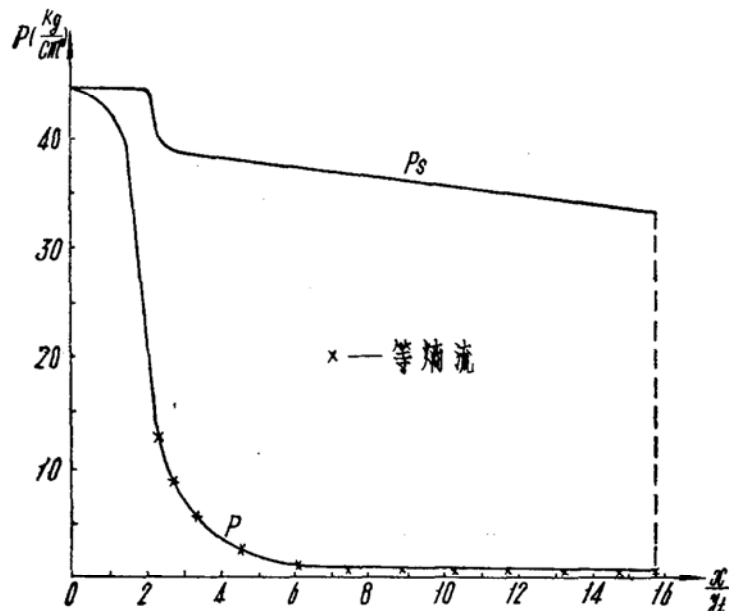


图6 压力沿喷管分布

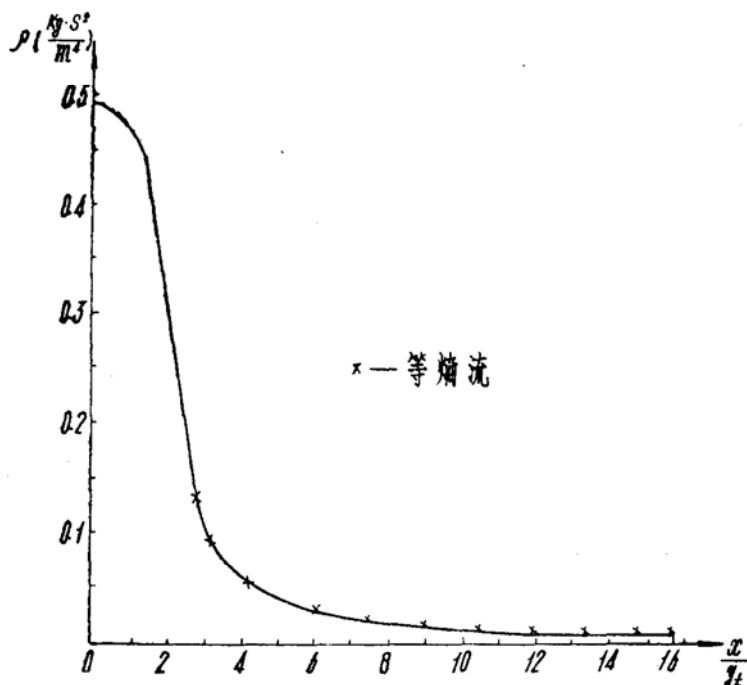


图7 密度沿喷管分布

图 8 示出了气流马赫数的变化。 $M = 1$ 位于喷管几何喉部的下游, 这主要是由于摩擦的作用提高了气体的温度, 使音速增大; 另一方面, 摩擦减小了气流速度, 使得气流在几何喉部处 M 小于 1。计算表明, 摩擦系数越大, 临界截面的位置就越移向喷管下游。

摩擦系数 f 沿喷管的分布示于图 9 中。由图可见, 在亚音速区 f 增加, 至临界截面附近达到最大值, 超音速区 f 又逐渐减小。图中还示出了不同 K 值下 f 的分布, 当 K 增大时, f 增大。可见, 喷管内型面的表面粗糙度对 f 有较大影响, 为了减小摩擦损失, 应适当提高内壁面, 特别是喉部区域的表面光洁度。

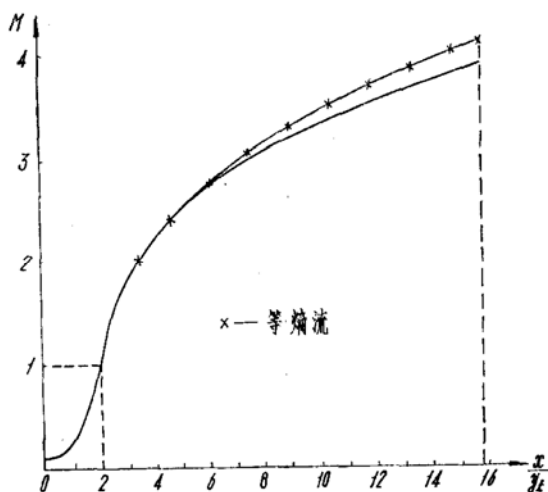


图 8 M数沿喷管分布

$$\left(\frac{x_t}{y_t} \approx 1.98 \right)$$

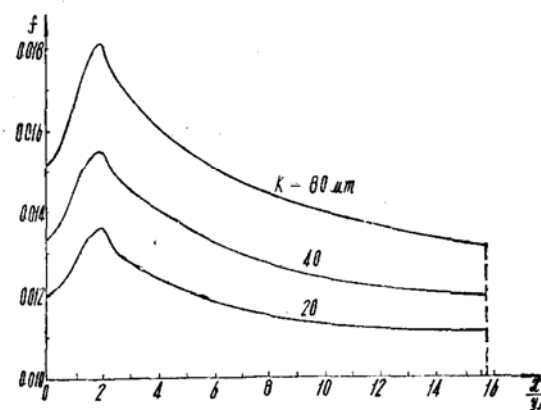


图 9 摩擦系数沿喷管分布

2. 摩擦对燃烧室压力和流量的影响

计算结果表明, 考虑喷管摩擦时得到的燃烧室压力和流量要比按等熵流计算的大。而且摩擦越大, 燃烧室压力和流量越大。图10、图11分别示出了 K 值对燃烧室压力和流量的影响。

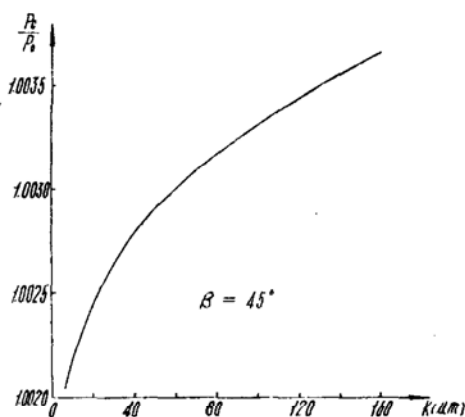


图 10 K 对燃烧室压力的影响

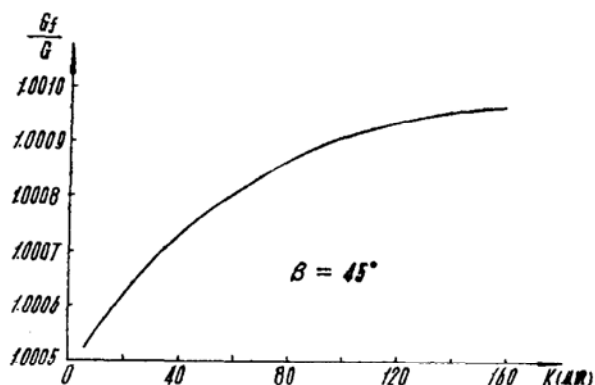


图 11 K 对流量的影响

对于锥形收敛段来说, 流量还与收敛角有关。表 1 列出了三种收敛角下的流量修正系数 C 。由表 1 可见, 收敛角小者流量系数稍大。

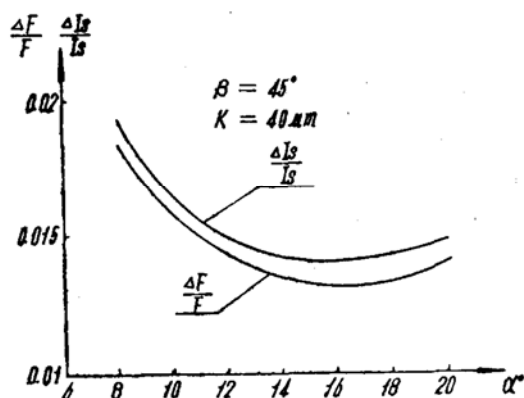
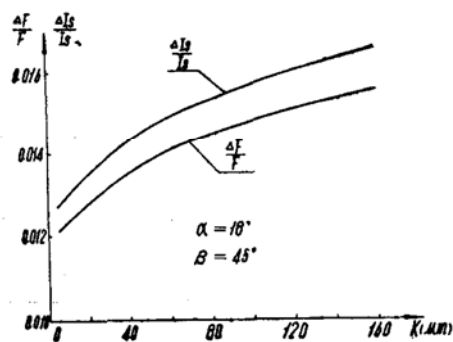
表 1

序 号	β	$C = G_f/G$
1	30°	1.000761
2	45°	1.000726
3	58°	1.000717

3. 摩擦损失

由于摩擦的影响, 实际喷管的排气速度比按等熵流计算的小, 造成推力和比冲的损失。在本例题中, 真空推力损失1.36%, 真空比冲损失1.44%。图12、图13中分别示出了真空推力和真空比冲损失与锥形喷管扩张半角 α 及表面粗糙度 K 的关系。在相同膨胀比下, 当 α 减小时, 一方面喷管增长, 摩擦引起的排气速度损失增大; 另一方面, 排气面上压力提高。所以, 推力和比冲损失是先略有减小而后增大, 在 $\alpha = 16^\circ$ 左右损失最小。 K 大则 f 大, 使摩擦损失增大。

因为计及摩擦时流量增大, 所以摩擦造成的比冲损失比推力损失稍大一些。

图 12 α 角对推力和比冲损失的影响图 13 K 对推力和比冲损失的影响

4. 几点看法

通过对上述计算结果的分析, 可得到下面几点看法:

- 1) 由于摩擦的影响, 喷管中气流速度减小, 温度升高, 总压降低, 但总温不变;
- 2) 考虑喷管摩擦时所得到的燃烧室压力和流量比按等熵流计算的稍大;
- 3) 摩擦使推力和比冲损失约1~2%, 而且比冲损失比推力损失大;
- 4) 流量与 K 值及 β 角有关; 推力和比冲损失与 α 角及 K 值有关;

5) 由于摩擦的影响, 实际喷管的性能与按等熵流关系式算出的不同。但由于它和等熵流的偏差通常较小, 所以常用的设计方法就以等熵流公式为基础, 引入经验系数来修正。

参 考 资 料

- (1) 可压缩流的动力学与热力学(上册) A.H.夏皮罗 科学出版社 1978
- (2) 固体推进剂火箭发动机的基本问题 京固群译 国防工业出版社 1976
- (3) 固体火箭发动机设计基础(上册) 长沙工学院 1976
- (4) 固体火箭发动机 (苏) A.M.维尼茨基 国防工业出版社 1981
- (5) Rocket Propulsion Elements 4th Edition P.Sutton 1976