基于混合区域极点配置的航空发动机全包线鲁棒变参数控制器设计*

贾秋生[1,2]，史新兴[1]，李华聪[1]，韩小宝[1]，李 岩[2,3]

（1. 西北工业大学 动力与能源学院，陕西 西安 710072；
2. 北京动力机械研究所，北京 100074；
3. 西北工业大学 航天学院，陕西 西安 710072）

摘 要：针对航空发动机全包线多变量鲁棒变增益控制器设计问题，提出了一种基于混合区域极点配置的鲁棒变参数控制方法。利用Jacobian方法建立多调度参数下的发动机仿射线性变参数（Linear parameter varying，LPV）模型，用于描述发动机全包线内的非线性动态特性；针对上述LPV模型，采用仿射参数依赖Lyapunov函数设计具有H_∞鲁棒性能的状态反馈控制器，给出了控制系统全局稳定性的证明；并利用混合区域极点配置方法，将闭环系统极点配置到左半平面指定位置，以保证控制系统的动态特性及稳定裕度；进而引入凸多胞技术，将参数依赖线性矩阵不等式（Linear matrix inequality，LMI）方程转化为有限维LMI进行控制器求解，并得到了全局解。针对涡扇发动机的仿真结果表明：存在复杂量测噪声干扰条件下，鲁棒变参数控制器可以实现发动机全包线内控制指令的精确跟踪，系统阶跃响应的调节时间不超过1.5s，系统无超调，对控制期望的稳态跟踪误差在0.02%以内，符合发动机控制系统技术要求。

关键词：航空发动机；参数依赖Lyapunov函数；线性变参数模型；极点配置；鲁棒控制
中图分类号：V235.13 **文献标识码**：A **文章编号**：1001-4055（2020）02-0431-08
DOI：10.13675/j.cnki. tjjs. 190035

Robust Parameter-Varying Controller Synthesis with Mixed Regional Pole Assignment for Aeroengine in Full Envelope

JIA Qiu-sheng[1,2]，SHI Xin-xing[1]，LI Hua-cong[1]，HAN Xiao-bao[1]，LI Yan[2,3]

（1. School of Power and Energy，Northwestern Polytechnical University，Xi'an 710072，China；
2. Beijing Power Machinery Institute，Beijing 100074，China；
3. School of Astronautics，Northwestern Polytechnical University，Xi'an 710072，China）

Abstract：In order to solve the problem of multivariable robust gain-scheduling controller design of aeroengine in full envelope，a robust parameter-varying control algorithm based on mixed regional pole assignment was presented. Firstly，the Jacobian linearization method was used to obtain aero-engine affine Linear Parameter Varying（LPV）model with multiple scheduling parameters，which can describe its nonlinear dynamic performance in full envelope. Aiming at the LPV model above，a state feedback controller was designed using affine parameter-dependent Lyapunov functions and the controller satisfied robust H_∞ performance requirement. The proof

* **收稿日期**：2019-01-11；**修订日期**：2019-06-21。
通讯作者：贾秋生，博士生，研究领域为航空发动机建模与控制技术。E-mail：Jia_qiusheng@126.com
引用格式：贾秋生，史新兴，李华聪，等. 基于混合区域极点配置的航空发动机全包线鲁棒变参数控制器设计[J]. 推进技术，2020，41（2）：429-436. （JIA Qiu-sheng，SHI Xin-xing，LI Hua-cong，et al. Robust Parameter-Varying Controller Synthesis with Mixed Regional Pole Assignment for Aeroengine in Full Envelope[J]. *Journal of Propulsion Technology*，2020，41(2)：431-438.）

of the global stability for control system was given. The poles of the closed-loop system were placed to the designated region of the left half plane based on mixed regional pole assignment method, to guarantee the dynamic characteristics and stability margin of the control system. By introducing convex polytope technology, the parameter-dependent Linear Matrix Inequality (LMI) were transformed into finite-dimensional LMIs to solving controller, and the global solution is obtained.The simulation results of a turbofan engine in full envelope showed that, under complex measurement noise disturbances, the robust parameter-varying controller can realize the accurate tracking of control commands with step response time less than 1.5s, no over shoot and steady-state tracking error less than 0.02%, which satisfies the technical requirements of aeroengine control system.

Key words: Aeroengine; Parameter-dependent Lyapunov functions; Linear parameter varying model; Pole assignment; Robust control

1 引 言

航空发动机是一个高度复杂的非线性被控对象，其工作过程是极其复杂的气动热力过程，并且发动机特性随环境条件和工作状况的变化将发生很大变化。因此要求航空发动机控制系统在整个飞行包线内具有良好的鲁棒性能[1]。传统的增益调度技术的调参过程极其复杂，仅是从工程应用的角度考虑使用调度参数建立了局部线性控制器之间的关系，无法理论上保证系统在设计包线内的稳态特性，并且对控制系统不确定性的鲁棒性较差[2-3]。线性变参数(Linear parameter varying, LPV)控制是近年来受到大量学者广泛关注的一种新颖的增益调度技术，系统的非线性特性或者动态特性依赖于实时可测的外部参数，可对其采用线性控制理论的方法设计依赖于调度参数的变增益控制器，理论上保证了系统在整个参数轨迹上的稳定性和鲁棒性能，进而克服了传统增益调度控制器设计中的插值问题和稳定性问题[4]。

20世纪90年代，国外学者便开展了关于LPV鲁棒变增益控制理论的研究[5]，并随后将其应用于航空发动机控制中[6]。Balas针对普惠STF-952涡扇发动机建立了线性分式变换描述的LPV模型，采用小增益定理设计了基于参数依赖Lyapunov函数的多变量解耦LPV控制器，降低了基于单一Lyapunov函数方法的保守性[7]。Bruzelius等针对某型大涵道比涡扇发动机建立了基于速率的线性化LPV模型，并设计了保证L2性能的变增益控制器[8]。Turso等针对性能蜕化的航空发动机，基于二次Lyapunov函数同时结合神经网络控制设计了LPV控制器，实现了对发动机温度和推力指令的有效控制[9]。Gilbert等针对某型涡扇发动机建立了多项式LPV模型，通过对线性矩阵不等式(Linear matrix inequality, LMI)中Lyapunov变量和控制器变量关系的解耦设计了固定阶鲁棒H_∞控制器，降低了传统增益调度控制方法的保守性[10]。国内学者也纷纷进行了相关领域的研究，李华聪等分别基于Jacobian和基于变化速率的算法研究了涡扇发动机LPV建模方法[11]。吴斌等针对发动机全包线工况设计了基于系统广义距离调度策略的多胞形LPV鲁棒变增益控制器，实现了发动机中间状态高压转速控制[12]。Xie等针对存在参数不确定性的切换LPV系统设计了模型参考自适应控制器，并将其应用于某型涡扇发动机模型的转速跟踪控制[13]。孙昊博等针对发动机双层LPV模型，基于共同二次Lyapunov函数，采用滞后切换策略设计了切换LPV控制器，改善了切换过程中控制器的抖振问题[14]。

近年来许，多学者从不同角度对航空发动机LPV鲁棒增益调度控制进行了分析研究，并取得了一定的研究成果。但是上述方法通常基于Lyapunov稳定性理论，采用常值Lyapunov矩阵进行LPV系统稳定性分析，并未考虑参数依赖LMI中变参数Lyapunov矩阵与系统系数矩阵之间耦合乘积的影响，具有一定的保守性[15]。此外，上述文献只开展了航空发动机局部飞行包线多变量控制仿真验证或全包线单变量控制仿真验证。同时针对航空发动机这一特定对象的混合区域极点配置相关研究文献较少。

本文以双转子、双涵道混合排气式涡扇发动机为对象，存在外部干扰时，开展基于混合区域极点配置的航空发动机全包线多变量鲁棒变参数控制器设计与应用研究。

2 鲁棒变参数控制器设计

2.1 问题描述

考虑以下仿射LPV系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(\rho(t))\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\end{cases}\tag{1}$$

式中$\rho(t)\in \mathrm{R}^k$为实时可测调度参数，$\boldsymbol{x}(t)\in \mathrm{R}^n$为系统状态变量，$\boldsymbol{A}(\rho(t))$为依赖于参数轨迹$\rho(t)$的系统系数矩阵。为描述方便，后文略去时间$t$。

系统(1)鲁棒稳定当且仅当在整个参数轨迹上存在对称矩阵$\boldsymbol{P}(\rho)$满足[4]

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}(\rho)>0\\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\rho)\boldsymbol{P}(\rho)+\boldsymbol{P}(\rho)\boldsymbol{A}(\rho)+\dot{\boldsymbol{P}}(\rho)<0\\ \forall(\rho,\dot{\rho})\in\Theta\times\Phi\end{cases}\tag{2}$$

由于参数依赖Lyapunov函数的引入，上述LPV系统性能分析问题转换为参数依赖LMI约束下的非凸优化问题，是一类依赖于参数ρ的无穷维问题，且由于Lyapunov矩阵与系统系数矩阵之间耦合乘积和$\dot{\boldsymbol{P}}(\rho)$项的存在，导致全局分析结果求解困难。目前，通常不考虑参数依赖Lyapunov函数随参数轨迹变化的动态特性，将其作为常数处理；或采用网格法将系统的参数轨迹进行网格划分，只在网格点上分析系统的相关性能，以作为整个系统的性能分析结果，无法理论上保证系统的全局稳定性，仅具有有限的验证意义，因而上述两种方法均具有一定的保守性。

在航空发动机整个飞行包线内，由于模型的建模误差和各种扰动的存在，虽然采用LPV鲁棒H_∞控制能够保证系统稳定并具有一定的鲁棒性，但是它并不能处理系统的瞬时特性，线性系统的瞬时响应与其极点位置密切相关，因此为保证系统具有一定的稳态和动态特性，需将闭环系统的极点配置在左半平面上一个适当区域内[16]。

针对上述问题，本文给出一种基于混合区域极点配置的多变量鲁棒LPV控制器设计方法，根据仿射LPV对象及其性能分析参数依赖LMI条件的特点，通过引入多胞技术，将系统全局性能分析问题转化为所构造多胞顶点上常规LMI约束下的凸优化问题，降低了LPV控制系统分析和综合的保守性。

2.2　基于参数依赖Lyapunov函数的稳定性分析

针对仿射LPV系统(1)，系统矩阵为

$$\boldsymbol{A}(\rho)=\boldsymbol{A}_0+\rho_1\boldsymbol{A}_1+\cdots+\rho_n\boldsymbol{A}_n\tag{3}$$

式中$\boldsymbol{A}_0,\cdots,\boldsymbol{A}_n$为已知的常数矩阵，假定$\rho$及其变化速率分别位于紧集$\Theta$和$\Phi$中，并满足$\rho_i\in[\underline{\rho}_i,\bar{\rho}_i]$且$\dot{\rho}_i\in[\underline{\nu}_i,\bar{\nu}_i]$。

采用凸多胞技术，将上述仿射LPV系统转化为多胞LPV系统

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{A}}_1\\ \hat{\boldsymbol{A}}_2\\ \hat{\boldsymbol{A}}_3\\ \vdots\\ \hat{\boldsymbol{A}}_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\underline{\rho}_1&\underline{\rho}_2&\cdots&\underline{\rho}_{n-1}&\underline{\rho}_n\\ 1&\underline{\rho}_1&\underline{\rho}_2&\cdots&\underline{\rho}_{n-1}&\bar{\rho}_n\\ 1&\underline{\rho}_1&\underline{\rho}_2&\cdots&\bar{\rho}_{n-1}&\underline{\rho}_n\\ \vdots&&&\cdots&&\\ 1&\bar{\rho}_1&\bar{\rho}_2&\cdots&\bar{\rho}_{n-1}&\bar{\rho}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_0\\ \boldsymbol{A}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_n\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{A}(\rho)=\mathrm{Co}\{\hat{\boldsymbol{A}}_1,\hat{\boldsymbol{A}}_2,\cdots,\hat{\boldsymbol{A}}_m\}=\\ \qquad\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\hat{\boldsymbol{A}}_i:\alpha_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1\}\end{cases}\tag{4}$$

式中$m=2^n$。各凸胞顶点分解系数α_i基于变参数ρ的几何距离调度策略进行求解，参见文献[5]。

针对参数依赖LMI(2)约束下的非凸优化问题，将连续可微参数依赖Lyapunov矩阵变量$\boldsymbol{P}(\rho)$描述为仿射参数依赖形式

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{P}}_1\\ \hat{\boldsymbol{P}}_2\\ \hat{\boldsymbol{P}}_3\\ \vdots\\ \hat{\boldsymbol{P}}_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\underline{\rho}_1&\underline{\rho}_2&\cdots&\underline{\rho}_{n-1}&\underline{\rho}_n\\ 1&\underline{\rho}_1&\underline{\rho}_2&\cdots&\underline{\rho}_{n-1}&\bar{\rho}_n\\ 1&\underline{\rho}_1&\underline{\rho}_2&\cdots&\bar{\rho}_{n-1}&\underline{\rho}_n\\ \vdots&&&\cdots&&\\ 1&\bar{\rho}_1&\bar{\rho}_2&\cdots&\bar{\rho}_{n-1}&\bar{\rho}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_0\\ \boldsymbol{P}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{P}_n\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{P}(\rho)=\boldsymbol{P}_0+\rho_1\boldsymbol{P}_1+\cdots+\rho_n\boldsymbol{P}_n=\\ \qquad\mathrm{Co}\{\hat{\boldsymbol{P}}_1,\hat{\boldsymbol{P}}_2,\cdots,\hat{\boldsymbol{P}}_m\}=\\ \qquad\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\hat{\boldsymbol{P}}_i:\alpha_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1\}\end{cases}\tag{5}$$

对参数依赖Lyapunov矩阵变量$\boldsymbol{P}(\rho)$求导

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{P}}(\rho)&=\dot{\rho}_1\boldsymbol{P}_1+\cdots+\dot{\rho}_n\boldsymbol{P}_n=\\ &\mathrm{Co}\{\tilde{\boldsymbol{P}}_1,\tilde{\boldsymbol{P}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{P}}_m\}=\\ &\{\sum_{i=1}^{m}\beta_i\tilde{\boldsymbol{P}}_i:\beta_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{m}\beta_i=1\}\end{aligned}\tag{6}$$

相应地，各凸胞顶点Lyapunov矩阵变量$\tilde{\boldsymbol{P}}_i$可描述为

$$\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{P}}_1\\ \tilde{\boldsymbol{P}}_2\\ \tilde{\boldsymbol{P}}_3\\ \vdots\\ \tilde{\boldsymbol{P}}_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\underline{\nu}_1&\underline{\nu}_2&\cdots&\underline{\nu}_{n-1}&\underline{\nu}_n\\ 0&\underline{\nu}_1&\underline{\nu}_2&\cdots&\underline{\nu}_{n-1}&\bar{\nu}_n\\ 0&\underline{\nu}_1&\underline{\nu}_2&\cdots&\bar{\nu}_{n-1}&\underline{\nu}_n\\ \vdots&&&\cdots&&\\ 0&\bar{\nu}_1&\bar{\nu}_2&\cdots&\bar{\nu}_{n-1}&\bar{\nu}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_0\\ \boldsymbol{P}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{P}_n\end{bmatrix}\tag{7}$$

将式(4)~(6)代入式(2)，由于$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1$且$\sum_{i=1}^{m}\beta_i=1$，可得

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\hat{\boldsymbol{P}}_i>0\\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\alpha_i^2\beta_k(\hat{\boldsymbol{A}}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{P}}_i+\hat{\boldsymbol{P}}_i\hat{\boldsymbol{A}}_i+\tilde{\boldsymbol{P}}_k)+2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\alpha_i\alpha_j\\ \beta_k(\frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{A}}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{P}}_j+\hat{\boldsymbol{P}}_j\hat{\boldsymbol{A}}_i+\hat{\boldsymbol{A}}_j^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{P}}_i+\hat{\boldsymbol{P}}_i\hat{\boldsymbol{A}}_i+2\tilde{\boldsymbol{P}}_k))<0\end{cases}\tag{8}$$

$$\alpha_i^2\beta_k\in[0,1],2\alpha_i\alpha_j\beta_k\in[0,0.5]$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\alpha_i^2\beta_k+2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\alpha_i\alpha_j\beta_k=1$$

根据文献[17]引理3.3.1，只需在各凸胞顶点求解参数依赖Lyapunov矩阵变量$\boldsymbol{P}(\rho)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\hat{\boldsymbol{P}}_i$即可。进而针对仿射LPV系统(1)，结合多凸性引理和仿射二次稳定性定理，给出如下关于仿射参数依赖LPV系统鲁棒稳定性的定理，该条件为后面变参数鲁棒控制器的设计奠定了基础[18]。

定理1：LPV系统(1)参数依赖鲁棒稳定当且仅当存在对称正定矩阵$\hat{\boldsymbol{P}}_i,i=1,2,\cdots,m$，满足以下LMI约束

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{P}}_i>0\\ \hat{\boldsymbol{A}}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{P}}_i+\hat{\boldsymbol{P}}_i\hat{\boldsymbol{A}}_i+\tilde{\boldsymbol{P}}_k<0\\ \hat{\boldsymbol{A}}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{P}}_j+\hat{\boldsymbol{P}}_j\hat{\boldsymbol{A}}_i+\hat{\boldsymbol{A}}_j^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{P}}_i+\hat{\boldsymbol{P}}_i\hat{\boldsymbol{A}}_i+2\tilde{\boldsymbol{P}}_k<0\end{cases}\tag{9}$$

式中$i,k=1,2,\cdots,m$，且$1\leqslant i<j\leqslant m$。

2.3 多胞状态反馈控制系统H_∞性能指标分析

考虑以下仿射LPV系统

$$P:\begin{cases}\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=\tilde{\boldsymbol{A}}(\rho)\tilde{\boldsymbol{x}}+\tilde{\boldsymbol{B}}(\rho)\boldsymbol{u}\\ \tilde{\boldsymbol{y}}=\tilde{\boldsymbol{C}}(\rho)\tilde{\boldsymbol{x}}+\tilde{\boldsymbol{D}}(\rho)\boldsymbol{u}\end{cases}\tag{10}$$

式中$\rho\in\mathrm{R}^k$为实时可测的调度参数，$\rho\in\Theta$，$\dot{\rho}\in\Phi$；$\tilde{\boldsymbol{x}}\in\mathrm{R}^n$为系统状态变量；$\boldsymbol{u}\in\mathrm{R}^{n_u}$为系统输入信号；$\tilde{\boldsymbol{y}}\in\mathrm{R}^{n_y}$为测量输出信号；$\tilde{\boldsymbol{A}}(\rho)$，$\tilde{\boldsymbol{B}}(\rho)$，$\tilde{\boldsymbol{C}}(\rho)$和$\tilde{\boldsymbol{D}}(\rho)$为$\rho$的仿射函数，根据(4)类似方法可将其转换为矩阵顶点的凸组合描述

$$\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{A}}(\rho)&\tilde{\boldsymbol{B}}(\rho)\\ \tilde{\boldsymbol{C}}(\rho)&\tilde{\boldsymbol{D}}(\rho)\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\begin{pmatrix}\hat{\tilde{\boldsymbol{A}}}_i&\hat{\tilde{\boldsymbol{B}}}_i\\ \hat{\tilde{\boldsymbol{C}}}_i&\hat{\tilde{\boldsymbol{D}}}_i\end{pmatrix}\tag{11}$$

针对图1所示控制系统结构的LPV系统(10)，基于参数依赖Lyapunov函数的状态反馈H_∞控制问题转化为设计状态反馈控制律

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{K}(\rho)\boldsymbol{x}\tag{12}$$

式中动态LPV控制器$\boldsymbol{K}(\rho)=\boldsymbol{K}_0+\rho_1\boldsymbol{K}_1+\cdots+\rho_n\boldsymbol{K}_n=\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\hat{\boldsymbol{K}}_i:\alpha_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1\}$，以保证闭环系统鲁棒稳定，从扰动输入信号$\boldsymbol{w}$到控制输出信号$\boldsymbol{z}$的闭环传递函数$\boldsymbol{T}_{wz}(s)$的$H_\infty$范数小于性能指标$\gamma$，即

$$\left\|\boldsymbol{T}_{wz}(s)\right\|_\infty<\gamma\tag{13}$$

图1中，$\boldsymbol{w}$为增广被控对象的控制期望，其中$\boldsymbol{d}$为量测干扰，$\boldsymbol{r}$为参考输入；$\boldsymbol{u}$为控制作用量；设$\dot{\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{r}-(\tilde{\boldsymbol{y}}+\boldsymbol{d})$，则$\boldsymbol{e}=\int_0^t(\boldsymbol{r}(\tau)-\tilde{\boldsymbol{y}}(\tau)-\boldsymbol{d}(\tau))\mathrm{d}\tau$；$\boldsymbol{x}=(\tilde{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{e})^{\mathrm{T}}$为增广系统状态变量，$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{y}=\tilde{\boldsymbol{y}}$为增广系统输出变量，

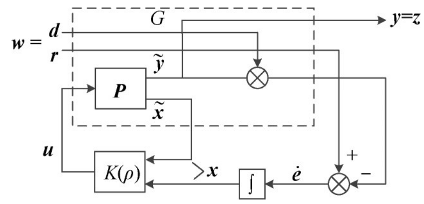


Fig. 1 Control system block diagram

则增广系统$\boldsymbol{G}$可表示为

$$G:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(\rho)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_1(\rho)\boldsymbol{w}+\boldsymbol{B}_2(\rho)\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{z}=\boldsymbol{C}_1(\rho)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}_{11}(\rho)\boldsymbol{w}+\boldsymbol{D}_{12}(\rho)\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}_2(\rho)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}_{21}(\rho)\boldsymbol{w}+\boldsymbol{D}_{22}(\rho)\boldsymbol{u}\end{cases}\tag{14}$$

式中 $\boldsymbol{A}(\rho)=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{A}}(\rho)&\boldsymbol{0}\\ -\tilde{\boldsymbol{C}}(\rho)&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}_1(\rho)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{I}&\boldsymbol{I}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}_2(\rho)=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{B}}(\rho)\\ -\tilde{\boldsymbol{D}}(\rho)\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}_1(\rho)=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{C}}(\rho)&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{D}_{11}(\rho)=[\boldsymbol{0}]$，$\boldsymbol{D}_{12}(\rho)=[\tilde{\boldsymbol{D}}(\rho)]$，$\boldsymbol{C}_2(\rho)=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{C}}(\rho)&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{D}_{21}(\rho)=[\boldsymbol{0}]$，$\boldsymbol{D}_{22}(\rho)=[\tilde{\boldsymbol{D}}(\rho)]$，$\boldsymbol{I}$代表适当维数的单位矩阵。

相应闭环系统为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{cl}}(\rho)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{cl}}(\rho)\boldsymbol{w}\\ \boldsymbol{z}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{cl}}(\rho)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}_{\mathrm{cl}}(\rho)\boldsymbol{w}\end{cases}\tag{15}$$

式中

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_{\mathrm{cl}}(\rho)=\boldsymbol{A}(\rho)+\boldsymbol{B}_2(\rho)\boldsymbol{K}(\rho)\\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{cl}}(\rho)=\boldsymbol{B}_1(\rho)\\ \boldsymbol{C}_{\mathrm{cl}}(\rho)=\boldsymbol{C}_1(\rho)+\boldsymbol{D}_{12}(\rho)\boldsymbol{K}(\rho)\\ \boldsymbol{D}_{\mathrm{cl}}(\rho)=\boldsymbol{D}_{11}(\rho)\end{cases}$$

在Lyapunov稳定性理论和有界实引理的基础上，针对上述LPV系统(15)的稳定性和H_∞性能指标分析问题有如下定理：

定理2[19]：对于给定正实数γ，系统(15)鲁棒稳定，且系统H_∞性能指标$<\gamma$的充分条件是：在整个参数轨迹上$\forall(\rho,\dot{\rho})\in\Theta\times\Phi$，当且仅当存在对称矩阵$\boldsymbol{P}(\rho)$满足下列LMI约束

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}(\rho)>0\\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{\mathrm{cl}}(\rho)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(\rho)+\boldsymbol{P}(\rho)\boldsymbol{A}_{\mathrm{cl}}(\rho)+\dot{\boldsymbol{P}}(\rho)&\boldsymbol{P}(\rho)\boldsymbol{B}_{\mathrm{cl}}(\rho)&\boldsymbol{C}_{\mathrm{cl}}(\rho)^{\mathrm{T}}\\ *&-\gamma\boldsymbol{I}&\boldsymbol{D}_{\mathrm{cl}}(\rho)^{\mathrm{T}}\\ *&*&-\gamma\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0\end{cases}\tag{16}$$

式中*表示由矩阵对称性所得矩阵块。

式(16)中由于存在$\boldsymbol{P}(\rho)$和$\boldsymbol{K}(\rho)$两个未知矩阵变量，并且以非线性的形式出现，根据文献[20]，引入替换变量$\boldsymbol{X}(\rho)=\boldsymbol{P}^{-1}(\rho)$，$\boldsymbol{Y}(\rho)=\boldsymbol{K}(\rho)\boldsymbol{X}(\rho)$且仿

射依赖于参数ρ,有

$$\begin{cases} X(\rho) = X_0 + \rho_1 X_1 + \cdots + \rho_n X_n = \\ \qquad \{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \hat{X}_i : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \} \\ Y(\rho) = Y_0 + \rho_1 Y_1 + \cdots + \rho_n Y_n = \\ \qquad \{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \hat{Y}_i : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \} \end{cases} \tag{17}$$

$$\dot{X}(\rho) = \dot{\rho}_1 X_1 + \dot{\rho}_2 X_2 + \cdots + \dot{\rho}_n X_n = \{ \sum_{i=1}^{m} \beta_i \tilde{X}_i : \beta_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1 \} \tag{18}$$

通过引入凸多胞技术,将式(17),(18)代入式(16),并将其转化为关于矩阵变量$X(\rho)$、$Y(\rho)$的LMI,由定理1可得该凸多胞LPV系统鲁棒稳定,进而转化为如下凸优化问题

$$\min \gamma$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \alpha_i^2 \beta_k \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Xi_{ii} + \tilde{X}_k & B_1 & \frac{1}{2} \Psi_{ii} \\ B_1^{\mathrm{T}} & -\gamma I & D_{11}^{\mathrm{T}} \\ \frac{1}{2} \Psi_{ii}^{\mathrm{T}} & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} + \\ 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \alpha_i \alpha_j \beta_k \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Xi_{ij} + \tilde{X}_k & B_1 & \frac{1}{2} \Psi_{ij} \\ B_1^{\mathrm{T}} & -\gamma I & D_{11}^{\mathrm{T}} \\ \frac{1}{2} \Psi_{ij}^{\mathrm{T}} & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \hat{X}_i > 0 \end{cases} \tag{19}$$

式中$\Xi_{ij} = \hat{A}_i \hat{X}_j + \hat{A}_j \hat{X}_i + \hat{X}_i \hat{A}_j^{\mathrm{T}} + \hat{X}_j \hat{A}_i^{\mathrm{T}} + \hat{B}_{2i} \hat{Y}_j + \hat{B}_{2j} \hat{Y}_i + \hat{Y}_i^{\mathrm{T}} \hat{B}_{2j}^{\mathrm{T}} + \hat{Y}_j^{\mathrm{T}} \hat{B}_{2i}^{\mathrm{T}}$,$\Psi_{ij} = \hat{X}_i \hat{C}_{1j}^{\mathrm{T}} + \hat{X}_j \hat{C}_{1i}^{\mathrm{T}} + \hat{Y}_i^{\mathrm{T}} \hat{D}_{12j}^{\mathrm{T}} + \hat{Y}_j^{\mathrm{T}} \hat{D}_{12i}^{\mathrm{T}}$。

2.4 混合区域极点配置变增益控制器设计

为保证上述闭环系统具有良好的动态和稳态性能,将闭环系统极点配置到复平面上如图2阴影部分所示的区域$S(\sigma, r, q)$,由于该区域可以看作一个具有σ稳定度的左半平面区域D_σ和一个半径为r,中心在$(-q, 0)$的圆盘$D(r, q)$的交集,因而其LMI域可描述为

$$S(\sigma,r,q) = \{ s \in C : Re(s) < -\sigma, \ (s+q)(\bar{s}+q) - r^2 < 0 \} \tag{20}$$

根据文献[20]定理6.1.1,闭环系统在上述混合区域二次D-稳定的充要条件是存在对称正定矩阵$P(\rho)$,满足

$$M_{\mathrm{D}}(A_{\mathrm{cl}}(\rho), P(\rho)) < 0 \tag{21}$$

式中,$M_{\mathrm{D}}(A_{\mathrm{cl}}(\rho), P(\rho)) = L \otimes P(\rho) + M \otimes (A_{\mathrm{cl}}(\rho) P(\rho)) + M^{\mathrm{T}} \otimes (A_{\mathrm{cl}}(\rho) P(\rho))^{\mathrm{T}}$,$\otimes$表示矩阵的Kronecker乘积。

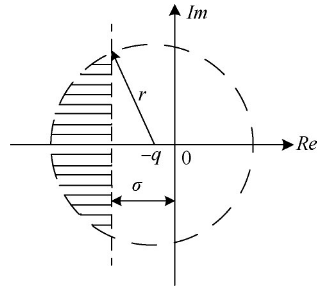


Fig. 2 Region $S(\sigma,r,q)$

引入替换变量$X(\rho) = P^{-1}(\rho)$,$Y(\rho) = K(\rho) X(\rho)$,将上式转化为如下LMI约束

$$\begin{cases} A(\rho)X(\rho) + X(\rho)A^{\mathrm{T}}(\rho) + B_2(\rho)Y(\rho) + \\ Y^{\mathrm{T}}(\rho)B_2^{\mathrm{T}}(\rho) + \dot{X}(\rho) + 2\sigma X(\rho) < 0 \\ \begin{bmatrix} -rX(\rho) & qX(\rho) + A(\rho)X(\rho) + B_2(\rho)Y(\rho) \\ qX(\rho) + X(\rho)A^{\mathrm{T}}(\rho) + Y^{\mathrm{T}}(\rho)B_2^{\mathrm{T}}(\rho) & -rX(\rho) \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \tag{22}$$

将式(17)代入式(22)可得

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \alpha_i^2 \beta_k (\frac{1}{2} \Xi_{ii} + \tilde{X}_k) + \\ 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \alpha_i \alpha_j \beta_k (\frac{1}{2} \Xi_{ij} + \tilde{X}_k) + 2\sigma \sum_{k=1}^{m} \alpha_i \hat{X}_i < 0 \\ \sum_{k=1}^{m} \alpha_i \begin{bmatrix} -r\hat{X}_i & q\hat{X}_i \\ q\hat{X}_i & -r\hat{X}_i \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \alpha_i^2 \begin{bmatrix} 0 & Z_{ii} \\ Z_{ii}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} + \\ \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} \alpha_i \alpha_j \begin{bmatrix} 0 & Z_{ij} \\ Z_{ij}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \tag{23}$$

式中$Z_{ij} = \hat{A}_i \hat{X}_j + \hat{B}_{2i} \hat{Y}_j + \hat{A}_j \hat{X}_i + \hat{B}_{2j} \hat{Y}$。

综上所述,针对LPV系统(10)设计状态反馈控制律(12),使得闭环系统(15)同时满足以上给定的闭环混合区域极点约束和H_∞性能指标γ的多目标控制问题,转化为一个关于矩阵变量$\hat{X}_i$,$\hat{Y}_i$和$\tilde{X}_k$的LMI约束和线性目标函数的凸优化问题式(19)和式(23),故可以应用LMI工具箱中的求解器Mincx来求解该优化问题,进而设计动态LPV控制器

$$K(\rho) = Y(\rho) X^{-1}(\rho) \tag{24}$$

3 基于航空发动机LPV模型的变参数控制器设计及其仿真验证

航空发动机飞行包线范围宽广,工作状态变化范围很大,很难采用单一参数表征发动机全包线内的飞行状态和工作状态。为此,选择飞行高度H,马赫数Ma和低压转子转速n_{L}作为调度参数反映发动

机飞行包线内不同的飞行环境及工作状态，进而利用发动机LPV模型设计变参数增益调度控制器。

3.1 航空发动机仿射LPV模型及其多胞表示

针对涡扇发动机模型，在如图3所示的飞行包线内，选择9种飞行条件（H(km)，Ma）：(0，0)，(5，0.5)，(5，0.8)，(10，1.0)，(10，1.5)，(10，1.8)，(18，1.0)，(18，1.5)，(18，1.8)，并在每种飞行条件下当相对低压转子转速$n_L \in [0.80 \sim 0.98]$时基于Jacobian线性化方法均匀建立7个发动机精确线性模型。令时变调度参数$\rho = (H, Ma, n_L)^T$，以高、低压转子转速相对变化量作为状态变量$\boldsymbol{x} = (\Delta \boldsymbol{n}_H, \Delta \boldsymbol{n}_L)^T$，主燃油供油量、尾喷口面积的相对变化量作为控制变量$\boldsymbol{u} = (\Delta \boldsymbol{m}_f, \Delta \boldsymbol{A}_8)^T$，低压转子转速和高压涡轮出口温度的相对变化量作为被控变量$\boldsymbol{y}_0 = (\Delta \boldsymbol{n}_L, \Delta T_4)^T$，进而采用插值法得到如式（10）的发动机仿射LPV模型[21]。

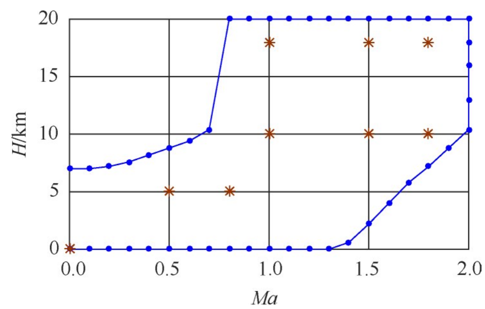


Fig. 3 Flight envelope of aero-engine

考虑燃油计量装置和尾喷口作动筒为惯性环节，其时间常数分别为0.05s和0.1s，其传递函数可统一表示为

$$G_w = \frac{T}{s + T} \tag{25}$$

取$\Delta \dot{\boldsymbol{m}}_f$和$\Delta \dot{\boldsymbol{A}}_8$也作为状态变量，得到扩展对象模型，进而根据上述模型建立形如式（11）所描述的发动机多胞LPV模型。

为验证上述发动机LPV模型精度，在设计点H = 0km，Ma = 0，n_L = 0.86和非设计点H = 12km，Ma = 1.2，n_L = 0.9将$\Delta \boldsymbol{m}_f$作2%阶跃扰动，发动机非线性部件级模型与LPV模型的动态阶跃响应如图4~图7所示。

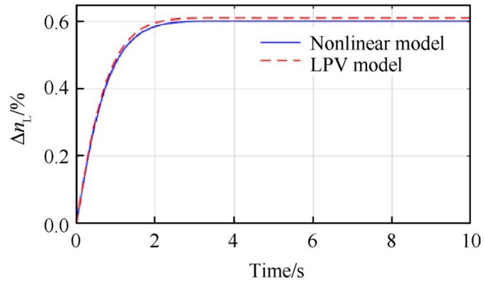


Fig. 4 Δn_L step response at H=0km, Ma=0, n_L=0.86

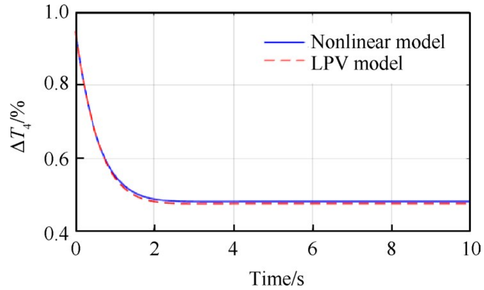


Fig. 5 ΔT_4 step response at H=0km, Ma=0, n_L=0.86

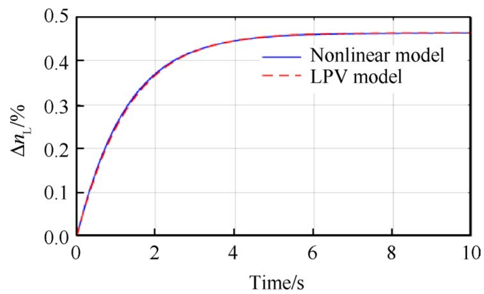


Fig. 6 Δn_L step response at H=12km, Ma=1.2, n_L=0.90

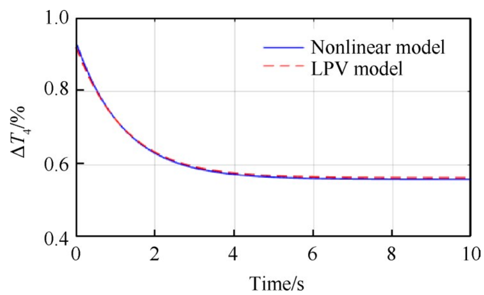


Fig. 7 ΔT_4 step response at H=12km, Ma=1.2, n_L=0.90

上述仿真表明，发动机LPV模型对非线性部件级模型的动态阶跃跟踪效果较好，稳态误差≤0.02%，可满足发动机控制系统设计需求。

3.2 基于多胞LPV模型的航空发动机多变量控制器设计

在给定发动机多胞LPV模型的基础上，设计如图1所示发动机控制系统结构，要求闭环系统极点配置到σ = 1.3，q = 6.5，r = 4.5所约束区域，并根据第2.4节研究方法求解基于混合区域极点配置的LPV鲁棒H_∞控制器。以飞行条件：H = 10km，Ma = 1.5，n_L = 0.9为仿真算例，解得γ = 3.47 × 10^{-8}<1，控制系统满足全局范围稳定要求。根据式（24），该条件下控制器参数为

$$\boldsymbol{K}(H,Ma,n_L) = \begin{bmatrix} 2.38 & 2.97 & 0.68 & 0.16 & -7.14 & 3.02 \\ -9.57 & -15.28 & -0.61 & -0.60 & 39.88 & -6.80 \end{bmatrix}$$

3.3　仿真验证

通过上述研究，对双转子、双涵道混合排气式涡扇发动机存在随机外部噪声干扰时，在慢车以上飞行包线范围内，根据设计的基于混合区域极点配置的鲁棒变参数控制器与上述涡扇发动机部件级非线性数学模型组成闭环控制系统进行仿真分析。限于篇幅，本文现给出高度（km）、马赫数和低压转子转速分别为(0.5, 0.2, 0.83)，(6, 1.0, 0.9)，(15, 1.5, 0.95)三个非设计点的仿真结果，验证控制系统的稳定性、不同控制通道的动、静态性能和通道间的耦合影响，仿真过程中引入如图8所示的信噪比 SNR（dB）为(60, 60)的零均值高斯白噪声，仿真结果如图9~图10所示。图9表示当参考输入 $r_{T_4} = 0, r_{n_L} = 1$ 时，多变量控制系统 Δn_L 和 ΔT_4 的阶跃响应和解耦效果。图10表示当参考输入 $r_{T_4} = 1, r_{n_L} = 0$ 时，多变量控制系统 Δn_L 和 ΔT_4 的阶跃响应和解耦效果。

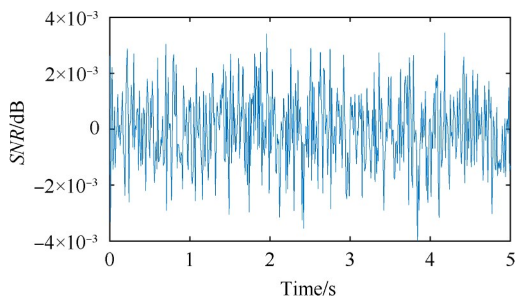
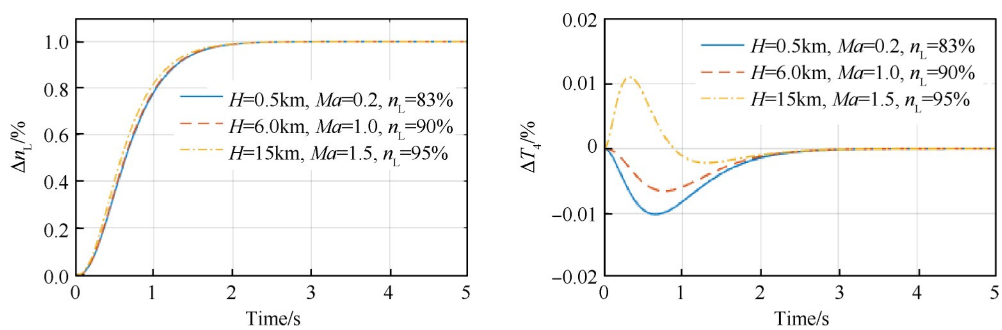


Fig. 8　Zero mean Gauss white noise

由图9(a)，图10(a)可见，在飞行包线内不同飞行状态下，本文所设计的基于混合区域极点配置的多变量鲁棒变参数控制器，在可变参数(H, Ma, n_L)的调度下，随着参考输入的变化，发动机的响应能够快速跟踪控制指令的变化，保证了发动机在稳态工作点下控制系统的稳定性，同时保证控制系统具有良好的动态性能。系统阶跃响应的调节时间≤1.5s，系统无超调，对控制期望的稳态跟踪误差<0.02%，同时控制系统对测量干扰具有很好的抑制作用，全面优于文献[7]控制效果（调节时间<3s，超调量<3.5%）并理论上保证了控制系统的全局稳定性。

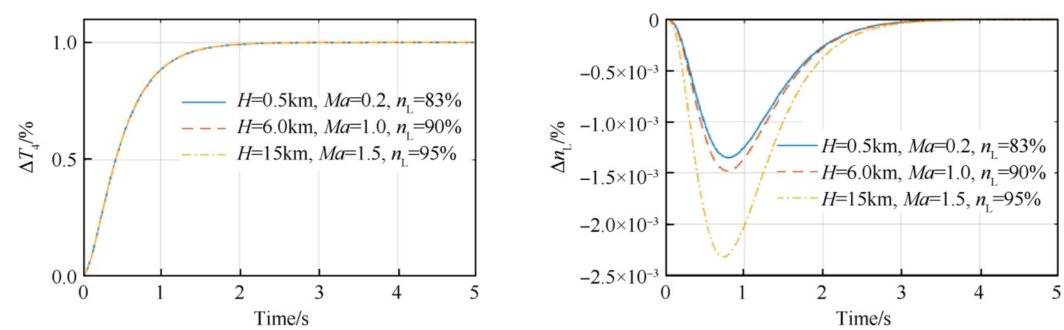
由图9(b)、图10(b)可得，控制系统具有非常满意的动态响应和解耦结果，不同的控制通道之间耦合影响较小，系统的最大耦合影响<1.5%，且衰减速度较快，衰减时间<3s。

综上所述，本文所设计的多变量鲁棒变参数控制器较好地满足了航空发动机控制系统的技术指标设计要求，保证了在较大的参数变化范围内，发动机控制系统具有良好的鲁棒性能和动态特性。



(a) Δn_L step response curve　　(b) ΔT_4 step response curve

Fig. 9　ΔT_4 and Δn_L step response at $r_{T_4}=0, r_{n_L}=1$



(a) ΔT_4 step response curve　　(b) Δn_L step response curve

Fig. 10　ΔT_4 and Δn_L step response at $r_{T_4}=0, r_{n_L}=1$

4 结 论

通过本文研究，得到以下结论：

（1）存在复杂外部噪声干扰情况下，发动机变参数控制系统具有很强的抗干扰能力，能够保证大范围内系统具有良好的控制效果。

（2）本文设计的鲁棒变参数控制器在随机选择的非设计点具有良好的稳态和动态特性，系统阶跃响应的调节时间≤1.5s，系统无超调，对控制期望的稳态跟踪误差<0.02%，同时具有很好的解耦效果，符合发动机控制系统技术指标要求。

参考文献

[1] 樊思齐. 航空发动机控制[M]. 西安：西北工业大学大学出版社，2008.

[2] Bianchi F D, Sánchez Peña R S. Interpolation for Gain-Scheduled Control with Guarantees [J]. *Automatica*, 2011, 47(1): 239-243.

[3] Bianchi F D, Sánchez-Peña R S, Guadayol M. Gain Scheduled Control Based on High Fidelity Local Wind Turbine Models[J]. *Renewable Energy*, 2012, 37(1): 233-240.

[4] Briat C. Linear Parameter-Varying and Time-Delay Systems: Analysis, Observation, Filtering & Control[M]. *Heidelberg: Springer*, 2014.

[5] Apkarian P, Gahinet P, Becker G. Self-Scheduled H_∞ Control of Linear Parameter-Varying Systems: A Design Example[J]. *Automatica*, 1995, 31(9): 1251-1261.

[6] Gregory W, Balas G J, William L Garrard. Application of Parameter-Dependent Robust Control Synthesis to Turbofan Engines[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1999, 22(6): 833-838.

[7] Balas G J. Linear , Parameter-Varying Control and Its Application to a Turbofan Engine[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, 2002, 12(9): 763-796.

[8] Bruzelius, F, Breitholtz C, Pettersson S. LPV-Based Gain Scheduling Technique Applied to a Turbo Fan Engine Model[C]. *Glasgow: Control Applications*, 2002.

[9] James Turso, Jonathan L S. Intelligent, Robust Control of Deteriorated Turbofan Engines via Linear Parameter Varing Quadratic Lyapunov Function Design[C]. *Chicago: AIAA 1st Intelligent Systems Technical Conference*, 2004.

[10] Gilbert W, Henrion D, Bernussou J, et al. Polynomial LPV Synthesis Applied to Turbofan Engines[J]. *Control Engineering Practice*, 2010, 18(9): 1077-1083.

[11] 李华聪，王 鑫，韩小宝，等. 航空发动机线性变参数建模方法研究[J]. 推进技术，2007，28(4)：418-421.（LI Hua-cong, WANG Xin, HAN Xiao-bao, et al. Study of Aeroengine Linear Parameter Varying Modeling [J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2007, 28(4): 418-421.）

[12] 吴 斌，黄金泉. 航空发动机全包线鲁棒变增益 lpv 控制律设计[J]. 南京航空航天大学学报，2014，46(2)：252-258.

[13] Xie Jing, Zhao Jun. Model Reference Adaptive Control for Switched LPV Systems and Its Application [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2016, 10(17): 2204-2212.

[14] 孙昊博，潘慕绚，黄金泉. 基于双层LPV模型的涡扇发动机切换控制[J]. 推进技术，2018，39(12)：2828-2838.（SUN Hao-bo, PAN Mu-xuan, HUANG Jin-quan. Switching Control of Turbofan Engine Based on Double-Layer LPV Model [J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2018, 39(12): 2828-2838.）

[15] LU Bei, WU Fen. Switching LPV Control Designs Using Multiple Parameter-Dependent Lyapunov Functions[J]. *Automatica*, 2004, 40(11): 1973-1980.

[16] Rao P S, Sen I. Robust Pole Placement Stabilizer Design Using Linear Matrix Inequalities[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2000, 15(1): 313-319.

[17] Chumalee S. Robust Gain-Scheduled H_∞ Control for Unmanned Aerial Vehicles[D]. *Cranfield: Cranfield University*, 2010.

[18] Apkarian P, Tuan H D. Parameterized LMIs in Control Theory[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, 38(4): 1241-1264.

[19] Gáspár Péter, Zoltán Szabó, József Bckor. Robust Control Design for Active Driver Assistance Systems: A Linear-Parameter-Varying Approach [M]. *Switzerland: Springer*, 2016.

[20] 俞 立. 鲁棒控制：线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京：清华大学出版社，2002.

[21] Henrik R. Advanced Control of Turbofan Engines[M]. *New York: Springer Science & Business Media*, 2011.

（编辑：朱立影）